

פתרונות לתרגיל הראשון

עולה עולה

אנחנו נשתמש בהוכחה בטכניקה שמזכירה את השאלה "לכלוע את החכמה" מחוברת התרגילים הפתורים (אבל בלי שימוש בלינאריות התוחלת). אנחנו נגדיר מרחב הסתברות $\mu_{p,q}$ מעל $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ שבו מוגרל זוג של קבוצות (A, B) , באופן הבא: לכל $s \in S$, באופן ב"ת בכל $t \in S$ אחר, נבחר עבורו אחת מהתוצאות הבאות: בהסתברות p נקבע $s \in A \cap B$, בהסתברות $q - p$ נקבע $s \in B \setminus A$ (כזכור לפי ההנחות שלנו $p < q$), ובהסתברות הנותרת $1 - q$ נקבע $s \notin A \cup B$. שימו לב שעבור הגרלה כזו של (A, B) מתקיימים הדברים הבאים:

- ההתפלגות (הלא-מותנה) של A זהה ל- μ_p .
- ההתפלגות (הלא-מותנה) של B זהה ל- μ_q .
- תמיד (בהסתברות 1) מתקיים $A \subseteq B$.
- בהסתברות $(q - p)^{|S|} > 0$ מתקיים $(A, B) = (\emptyset, S)$, כי $p < q$.

מהסעיף הראשון מתקיים $\Pr_{\mu_{p,q}}[A \in \mathcal{A}] = \Pr_{\mu_p}[A]$ ומהסעיף השני מתקיים $\Pr_{\mu_{p,q}}[B \in \mathcal{A}] = \Pr_{\mu_q}[A]$. מכיוון ש- $\mathcal{A}$ היא מונוטונית לא-יורדת, לפי הסעיף השלישי המאורע $A \in \mathcal{A}$ מוכל במאורע $B \in \mathcal{A}$, ולכן $\Pr_{\mu_p}[A] \leq \Pr_{\mu_q}[A]$.

הדרישה של השאלה אבל היא לא-שוויון חזק, ולשם כך נשתמש בסעיף הרביעי. בשאלה נתון שמתקיים $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(S)$, ולכן בפרט $\emptyset \notin \mathcal{A}$ (כי אחרת $\mathcal{A}$ היה מכיל את כל הקבוצות המכילות את הקבוצה הריקה, ז"א את כל $\mathcal{P}(S)$). כמו כן נתון שמתקיים $\mathcal{A} \neq \emptyset$, ולכן בפרט $S \in \mathcal{A}$ (כי אם $\mathcal{A}$ מכיל קבוצה כל שהיא אז הוא מכיל גם את S המכילה אותה). על כן הסיכוי שמתקיים $B \in \mathcal{A}$ אך לא מתקיים $A \in \mathcal{A}$ הוא לפחות $(q - p)^{|S|} > 0$, ולכן בפרט $\Pr_{\mu_q}[A] - \Pr_{\mu_p}[A] > 0$ כנדרש.

לפעמים קורה

מוכיחים את החסם באינדוקציה על k . המקרה $k = 1$ הוא טריביאלי.

עבור המעבר מ- $k-1$ ל- k ראשית נשים לב שהמאורע $A_k \setminus \bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i$ זר לאיחוד המאורעות $\bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i$, ולכן $\Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k} A_i] = \Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i] + \Pr[A_k \setminus \bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i]$. לפי הנחת האינדוקציה מתקיים $\Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i] \geq \sum_{1 \leq i \leq k-1} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} \Pr[A_i \wedge A_j]$.

עבור המחבר הימני, לפי חסם איחוד מאורעות מתקיים $\Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i \wedge A_k] \leq \sum_{1 \leq i \leq k-1} \Pr[A_i \wedge A_k]$. כמו כן, לפי איחוד מאורעות זרים $\Pr[A_k] = \Pr[A_k \setminus \bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i] + \Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i \wedge A_k]$, ולכן $\Pr[A_k \setminus \bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i] = \Pr[A_k] - \Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k-1} A_i \wedge A_k] \geq \Pr[A_k] - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \Pr[A_i \wedge A_k]$.

חיבור שני החסמים נותן לנו את המבוקש:

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigvee_{1 \leq i \leq k} A_i\right] &\geq \sum_{1 \leq i \leq k-1} \Pr[A_i] + \Pr[A_k] - \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} \Pr[A_i \wedge A_j] - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \Pr[A_i \wedge A_k] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k} \Pr[A_i \wedge A_j] \end{aligned}$$

הכל קשור

אנחנו נשתמש בקריטריון שגרף הוא קשיר אם אין חלוקה של קבוצת הצמתים לשתי קבוצות לא-ריקות ללא קשתות ביניהן. באופן מדויק, עבור מרחב ההסתברות $G(n, \alpha \ln(n)/n)$ כאשר נסמן את קבוצת הצמתים ב- $V = [n]$, נראה שההסתברות לקיום $1 \leq k \leq n/2$ וקבוצה $U \subset V$ מגודל k ללא קשתות בין U ל- $V \setminus U$ שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף.

עבור k ו- U ספציפיים, ההסתברות שאין קשתות בין U ל- $V \setminus U$ היא $(1 - \frac{\alpha \ln(n)}{n})^{k(n-k)} < e^{-\alpha k(n-k) \ln(n)/n}$. כמו כן, מספר הקבוצות האפשריות $U \subset V$ מגודל k הוא $\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$. ההסתברות שעבור k קבוע קיימת קבוצה U כזו חסומה אם כן ע"י $(\frac{en}{k})^k \cdot e^{-\alpha k(n-k) \ln(n)/n}$. מכאן צריך לפצל למקרים לפי הגודל של k . עבור המשך הניתוח, נבחר β שרירותי שמקיים $1 < \beta < \alpha$.

עבור $1 \leq k \leq 2/(\beta - 1)$ מתקיים $(\frac{e}{k})^k \leq 3$, וכן עבור n גדול דיו מתקיים $\alpha(n - k)/n > \beta$, ואז הביטוי של חסם הסיכוי הוא לכל היותר $3n^k e^{-\beta k \ln(n)} = 3n^{(1-\beta)k} = o(1)$.

עתה נחשב חסם עבור $2/(\beta - 1) < k \leq n^{2/3}$ (החזקה של n היא שרירותית, כל ערך גדול מ- $\frac{1}{2}$ וקטן מ-1 היה עובד כאן). שוב עבור n גדול מספיק מתקיים $\alpha(n - k)/n > \beta$, וכן מתקיים $(\frac{e}{k})^k < 1$. על כן חסם הסיכוי כאן הוא לכל היותר $n^{(1-\beta)k} < n^{-2} = o(1/n)$.

לבסוף ננתח את $n^{2/3} < k \leq n/2$. כאן נשתמש ב- $\frac{1}{2}k \leq k(n - k)/n \leq \frac{1}{2}k$ וגם ב- $k^k > e^{(2/3)k \ln(n)}$, ונקבל עבור n גדול דיו $(\frac{en}{k})^k \cdot e^{-\alpha k(n-k) \ln(n)/n} < \exp(k + (1 - 2/3 - \alpha/2)k \ln(n)) < e^{-k \ln(n)/6} = o(1/n)$.

עתה נעשה איחוד מאורעות נוסף ונסכום את החסמים על כל ה- k האפשריים. יש בסכום $O(1)$ $\lfloor 2/(\beta - 1) \rfloor$ איברים שהוכחנו שהם $o(1)$, ועוד $O(n)$ $\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor 2/(1 - \beta) \rfloor$ איברים שהוכחנו שהם $o(1/n)$. סך כל חסמי ההסתברות המתקבל כך הוא $o(1)$, שזה מה שרצינו להוכיח.

הערות: עבור הגרסה מופחתת-הנקודות של השאלה (כאשר דורשים $\alpha > 2$) הניתוח נהיה קל בהרבה ולא צריך כזה פיצול למקרים (משתמשים ב- $(n - k)/n \geq \frac{1}{2}$ בכל המקרים). כמו כן, שימו לב שהחסמים הם די "רופפים" פרט למקרים של ערכים קטנים של k , ובאמת "המכשול המרכזי" לקשירות הוא רכיבים מגודל קבוע. אפשר למצוא הוכחה פורמלית של האינטואיציה הזו וכן חסמים יותר מדויקים על ההסתברות הדרושה להבטחת קשירות בספר Random Graphs של Bollobás.

פתרונות לתרגיל השני

בלי אורך רוח

לכל $1 \leq m \leq n$ ולכל $1 \leq i \leq n+1-m$ נסמן ב- $A_{i,m}$ את המאורע $x_i = \dots = x_{i+m-1} = 0$. נסמן ב- Y את המ"מ שמקבל 0 אם $X \leq \lceil \log n \rceil$ ואחרת מקבל את הערך $X - \lceil \log n \rceil$. מספיק אם כן להוכיח שמתקיים $E[Y] = O(1)$ בגלל שתמיד מתקיים $X \leq Y + \lceil \log n \rceil \leq \log n + 1 + Y$.

נפתח: $E[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr[Y = i] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[Y \geq k] = \sum_{k=1}^{n-\lceil \log n \rceil} \Pr[\bigvee_{i=1}^{n+1-k-\lceil \log n \rceil} A_{i,k+\lceil \log n \rceil}]$.
בשביל ההמשך נחשב באופן ישיר $\Pr[A_{i,k+\lceil \log n \rceil}] = 2^{-k-\lceil \log n \rceil} \leq 2^{-k}/n$ לכל $1 \leq k \leq n - \lceil \log n \rceil$.
מתקיים מכך לפי איחוד מאורעות $\Pr[Y \geq k] \leq \sum_{i=1}^{n+1-k-\lceil \log n \rceil} \Pr[A_{i,k+\lceil \log n \rceil}] \leq 2^{-k}$, ולכן מתקיים $E[Y] \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = O(1)$ כנדרש.

עם אורך רוח

נסמן ב- Z את המ"מ שמקבל 0 אם $X \geq \lceil \log n \rceil$ ואחרת מקבל את הערך $\lceil \log n \rceil - X$. בדומה לטיעון בפתרון השאלה הקודמת, כאן צריך להוכיח שמתקיים $E[Z] = O(1)$. עתה נתאר שיטה אלטרנטיבית להגריל את x : נגריל מ"מ $W_1, W_2, \dots, W_n$ באופן ב"ת לחלוטין, כאשר כל W_j מתפלג באופן גיאומטרי עם פרמטר $\frac{1}{2}$, ז"א שמתקיים $\Pr[W_j = k] = 2^{-k}$. ראשית נבנה מחרוזת x' ע"י שרשור המחרוזות $x_1, \dots, x_n$ כאשר x_j מורכב מ- $W_j - 1$ אפסים ולאחריו אחד בודד, ובסוף נקבע את x להיות מורכבת מ- n הביטים הראשונים של x' . הדבר לשים לב הוא ש- x שהוגרלה כאן גם מתפלגת יוניפורמית מעל $\{0, 1\}^n$ (ראו את ההוכחה בסוף הפתרון), ולכן אפשר לנתח את טענת השאלה תוך שימוש במ"מ $W_1, \dots, W_n$.

עתה נקבע את B בתור המאורע שיש ב- x פחות מ- $n/4$ אחדות. כזכור היה מותר לכם להשתמש בלי הוכחה בטענה (שאתם כבר יודעים להוכיח) שמתקיים $\Pr[B] \leq e^{-\Omega(n)}$. בנוסף לכך נקבע לכל $0 \leq k \leq \lceil \log n \rceil - 1$ את המאורע B_k שקובע ש- $W_1, W_2, \dots, W_{\lceil n/4 \rceil}$ כולם קטנים מ- $k + \lceil \log n \rceil$. הנקודה החשובה לשים לב כאן היא שהמאורע $Z > k$ מוכל באיחוד המאורעות $B_k \vee B$. כמו כן, מאי התלות של $W_1, W_2, \dots, W_{\lceil n/4 \rceil}$ מתקיים $\Pr[B_k] = (1 - 2^{k-\lceil \log n \rceil})^{\lceil n/4 \rceil} < \exp(-\lceil n/4 \rceil 2^{k-\lceil \log n \rceil}) \leq \exp(-2^{k-2})$.
מכל אלו מתקיים

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \Pr[Z = j] = \sum_{k=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} \Pr[k > j] \leq \sum_{k=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} (\Pr[B] + \Pr[B_k]) \\ &\leq \log n \cdot \Pr[B] + \sum_{k=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} \exp(-2^{k-2}) = O(1) \end{aligned}$$

הוכחת ההגרלה האלטרנטיבית: בעת בדיקת הפתרונות היינו קצת טולרנטים במידת הפורמליות, אבל כאן נראה הוכחה פורמלית מלאה ששיטת ההגרלה האלטרנטיבית של $x = (x_1, \dots, x_n)$ (דרך $W_1, \dots, W_n$) גם מתפלגת יוניפורמית מעל $\{0, 1\}^n$. ההוכחה היא באינדוקציה שלמה על n . הבסיס הוא $n = 0$ והוא טריביאלי. עבור המעבר, נניח שהטענה מתקיימת לכל $0 \leq m < n$ ונוכיח אותה עבור n . מקרה אחד, זה שבו $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (ז"א ש- x הוא כולו אפסים), נובע ישירות מכך שההסתברות עבור $W_1 \geq n$ היא 2^{-n} .

לכל x אחר, נסמן את $1 \leq i \leq n$ שעבורו $x_i = 1$ אבל $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = 0$ (ז"א שה-1 הכי "שמאלי" הוא במקום ה- i). נשים לב ש- x כזה יכול לקרות רק אם $W_1 = i$, דבר הקורה בהסתברות 2^{-i} בדיוק. עתה נפעיל את הנחת האינדוקציה עבור $y = (x_{i+1}, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^{n-i}$ עם $m = n - i$ והמ"מ $W_2, \dots, W_{n+1-i}$. לפי הנחת האינדוקציה אותו y מתקבל בהסתברות 2^{i-n} (גם כשמתנים על $W_1 = i$ בגלל אי התלות של $W_1, \dots, W_n$). הכפלה בהסתברות עבור $W_1 = i$ נותנת הסתברות של 2^{-n} עבור x כולו.

מקהלה עליזה

נשים לב שמהנתונים נובע בפרט $E[X_i] = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$, ולכן מנוסחת התוחלת השלמה נקבל $E[X_i|X_0 = 1] = -E[X_i|X_0 = -1]$ לכן $0 = \frac{1}{2}E[X_i|X_0 = 1] + \frac{1}{2}E[X_i|X_0 = -1]$ ומכך נובע $Cov[X_0, X_i] = E[X_0 X_i] - E[X_0]E[X_i] = E[X_i|X_0 = 1] - E[X_i|X_0 = -1] = 2E[X_i|X_0 = 1]$ שנמשיך, נניח שלפחות ל- $\frac{n}{2}$ מהאינדקסים $1 \leq i \leq n$ מתקיים $Cov[X_0, X_i] \geq \alpha$. אפשר להניח את זה, כי אחרת לפחות ל- $\frac{n}{2}$ מהאינדקסים $1 \leq i \leq n$ מתקיים $Cov[X_0, X_i] \leq -\alpha$, ואז אפשר להחליף את X_0 ב"שלילתו", $X'_0 = -X_0$, והסידרה החדשה $X'_0, X_1, \dots, X_n$ תקיים גם את הנחות השאלה וגם את ההנחה שלנו, מכיוון ש- X'_0 גם הוא מתפלג יוניפורמית מעל $\{-1, 1\}$, וכן מתקיים $Cov[X'_0, X_i] = -Cov[X_0, X_i]$ לכל $1 \leq i \leq n$ (הערה - אנחנו קיבלנו פתרונות ללא הוכחה פורמלית של טיעון זה, וגם הוכחות שבמקום ההנחה המובאת כאן רק ציינו שההוכחה למקרה השני היא "אנלוגית").

תחת ההנחה הזו נגדיר עתה את $S = \{1 \leq i \leq n : Cov[X_0, X_i] \geq \alpha\}$ וננתח את $V[\sum_{i \in S} X_i]$. לפי הנתונים מתקיים $E[\sum_{i \in S} X_i] = \sum_{i \in S} E[X_i] = 0$, וכן $E[\sum_{i \in S} X_i | X_0 = 1] \geq \frac{\alpha}{2}|S|$ מכיוון שתמיד מתקיים $\sum_{i \in S} X_i \leq |S|$, נובע מכך שמתקיים $\Pr[\sum_{i \in S} X_i \geq \frac{\alpha}{4}|S| | X_0 = 1] \geq \frac{\alpha}{4}$, ולכן לפי כלל השרשרת $\Pr[\sum_{i \in S} X_i \geq \frac{\alpha}{4}|S|] \geq \frac{\alpha}{8}$. על כן בהכרח מתקיים $\sqrt{V[\sum_{i \in S} X_i]} \geq \frac{\alpha^{3/2}}{2^{7/2}}|S|$ כי אחרת היתה לנו סתירה לאי-שוויון צ'בישף, ז"א $V[\sum_{i \in S} X_i] \geq \frac{\alpha^3}{128}|S|^2$.

הדבר הבא הוא להיזכר שמתקיים $V[\sum_{i \in S} X_i] = \sum_{i, j \in S} Cov[X_i, X_j]$ וכן $Cov[X_i, X_j] \leq 1$ (מהנתונים) על התפלגות המ"מ הנ"ל, בפרט שתמיד מתקיים $|X_i| \leq 1$, ולכן החסם התחתון על השונות אומר שבהכרח יש לפחות $\frac{\alpha^3}{256}|S|^2$ זוגות $i, j \in S$ שעבורם $Cov[X_i, X_j] \geq \frac{\alpha^3}{256}$. אם נציב את הנתון מקודם שמתקיים $|S| \geq \frac{n}{2}$, נובעת מכך דרישת השאלה עבור $\beta = \frac{\alpha^3}{1024}$.

פתרונות לתרגיל המסכם

זאב בודד

נגדיר את המשתנה המקרי X להיות מספר הצמתים חסרי השכנים בגרף שהוגרל, ונחשב את התוחלת שלו: ההסתברות של צומת מסויים להיות בודד היא

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)^{n-1} &\geq \left(e^{-\ln(n)/n - (\ln(n)/n)^2/2}\right)^{n-1} \\ &= e^{-\ln(n) - (\ln(n))^2/2n} / e^{-\ln(n)/n - (\ln(n)/n)^2/2} \geq \frac{1}{n} e^{-(\ln(n))^2/2n} = (1 - o(1)) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ולכן מתקיים לפי לינאריות התוחלת $E[X] = 1 - o(1)$. בשלב זה עדיין לא הוכחנו הרבה, כי X עלול לקבל ערכים גדולים עד n , אבל עתה נראה ש"הרבה מהתוחלת שלו" מתקבלת מערכים נמוכים. נשתמש בפיתוח $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \Pr[X = i] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X \geq k]$

אם מתקיים $X \geq k$, אז בפרט יש בגרף קבוצה U בת k צמתים ללא שכנים בין U ל- $V \setminus U$ (לוקחים את U להיות תתקבוצה בת k איברים של קבוצת הצמתים חסרי השכנים). עבור $k < \ln(n)$ ו- $n \geq 16$ הסיכוי שזה קורה חסום (דרך איחוד מאורעות) ע"י

$$\binom{n}{k} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)^{k(n-k)} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-k(n-k)\ln(n)/n} = \frac{n^k}{k!} \cdot n^{-k} \cdot e^{k^2 \ln(n)/n} \leq \frac{1}{k!} e^{(\ln(n))^3/n} \leq \frac{2}{k!}$$

עבור $k \geq \ln(n)$, נחסום את ההסתברות של $X \geq k$ דרך ההסתברות למאורע המכיל אותו $X \geq \lceil \ln(n) \rceil$. עבור n גדול די (למשל 1024), מתקבל $\Pr[X \geq k] \leq \frac{1}{\lceil \ln(n) \rceil!} e^{\lceil \ln(n) \rceil^3/n} \leq \frac{1}{8n}$

מאלו נובע שעבור n גדול די מתקיים

$$\frac{1}{2} \leq E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X \geq k] \leq \sum_{k=1}^4 \Pr[X \geq k] + \sum_{k=5}^{\lceil \ln(n) \rceil - 1} \frac{1}{k!} + (n - \lceil \ln(n) \rceil) \cdot \frac{1}{8n} \leq 4\Pr[X \geq 1] + \frac{1}{4}$$

ואז מהעברת אנפים נקבל $\Pr[X \geq 1] \geq \frac{1}{16} = \Omega(1)$, כנדרש.

הערה: יש עוד שיטות לבצע את החסמים, כולל כאלו שמשמשות ישירות (ללא פיתוח הסכום) בנוסחה $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \Pr[X = i]$. חלקן יותר ארוכות מזו המוצגת כאן.

לערבב היטב

הפתרון, באופן צפוי, משתמש במרטינגל חשיפה איבר-איבר עבור הפרמוטציה σ , כפי שמרטינגלים כאלו מוזכרים בתרגול. כאן הפונקציה שאת ערכה חושפים תוגדר לפי הגרף (הנתון מראש) G . נגדיר אותה ישירות לפי הערך שאותו אנחנו רוצים לחסום: $f(\sigma) = |E \cap E_\sigma|$. נסמן את המרטינגל המתקבל $X_0, \dots, X_{n-1}$ (כזכור פרמוטציה σ נקבעת כבר לפי הערכים $\sigma(1), \dots, \sigma(n-1)$, ולכן אורך המרטינגל הוא $n-1$ בלבד).

נשים לב ש- $X_0 = E[f(\sigma)]$ הוא (תמיד) $p^2 \binom{n}{2}$. את זאת מוכיחים ע"י לינאריות התוחלת: לכל $uv \in E$ (לפי הנתונים $p \binom{n}{2}$ זוגות כאלה) מגדירים את מ"מ האינדיקטור עבור המאורע $uv \in E_\sigma$, הוזה למאורע $\sigma(u)\sigma(v) \in E$. מכיוון שהזוג $\sigma(u)\sigma(v)$ מתפלג יוניפורמית מעל כל זוגות הצמתים מתוך V , הסיכוי לקיום המאורע הוא p . על כן $E[f(\sigma)] = \sum_{uv \in E} E[Z_{uv}] = p^2 \binom{n}{2}$.

על מנת לחסום את ההפרשים של המרטינגל, נסתכל על ערכי f עבור פרמוטציה כל שהיא σ ופרמוטציה σ' שנבדלת מ- σ רק בערכים $\sigma'(u) = \sigma(u)$ ו- $\sigma'(v) = \sigma(w)$. לכל צומת $w \neq u, v$ אם $\sigma(u)\sigma(w)$ ו- $\sigma(v)\sigma(w)$

שניהם ב- E , או שניהם מחוץ ל- E , אז מספר הקשתות שנספרות בתוך f ומערבות את w אינו משתנה. כאשר רק אחד מהזוגות $\sigma(u)\sigma(w)$ ו- $\sigma(v)\sigma(w)$ נמצא ב- E , אז מספר הקשתות ב- $E \cap E_\sigma$ שמערבות את w יהיה שונה ב-1 לעומת אלו ב- $E \cap E_{\sigma'}$. לבסוף נשים לב שמתקיים $\sigma(u)\sigma(v) = \sigma'(u)\sigma'(v)$ (כי הגרפים שלנו לא מכוונים ולכן אנחנו מתעלמים מסדר הצמתים). לכן סה"כ מתקיים $|f(\sigma) - f(\sigma')| \leq n - 2$, ולפי הטענה שנלמדה בתרגול נובע מכך $|X_i - X_{i-1}| \leq n - 2$ לכל $1 \leq i \leq n - 1$ (נעיר שלהוכיח חסם של $2n - 1$ היה לוקח מקום קצר יותר, ע"י חסימת $|E_\sigma \Delta E_{\sigma'}|$, והיה מספיק לגרסה החלקית של השאלה).

מכאן הדרך קצרה לשימוש במשפט אזורמה: לפי משפט זה (כאשר מציבים $\lambda = \alpha\sqrt{n}$ בניסוח שלו מהשעור) מתקיים $\Pr[X_{n-1} > X_0 + \alpha\sqrt{n} \cdot (n-2)\sqrt{n-1}] < e^{-\alpha^2 n/2}$, ובכיוון השני $\Pr[X_{n-1} < X_0 - \alpha\sqrt{n} \cdot (n-2)\sqrt{n-1}] < e^{-\alpha^2 n/2}$. מאלו מתקיים $\Pr[|E \cap E_\sigma| = (p^2 \pm \alpha)\binom{n}{2}] > 1 - 2e^{-\alpha^2 n/2}$. כנדרש.

לימונדה

על מנת להראות את המבוקש ניזכר איך בהרצאה, כאשר הראינו שיטה לחסימת מרטינגל חשיפה, הגדרנו בהינתן $\tilde{C} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ מרחב הסתברות על זוגות $C_1, C_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$. כאן, בהינתן $\tilde{C}$ ו- $\hat{C}$ שעבורם $\hat{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}$, נגדיר מרחב הסתברות מעל שלישיות $C_0, C_{\min}, C_{\max}$ באופן הבא: נגדיר את C לפי μ (כמו בהרצאה), וראשית נבצע את C_0 לפי $C_0(d) = \hat{C}(d)$ עבור $d \in \mathcal{D}_i$ ו- $C_0(d) = C(d)$ עבור $d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_i$. נזכר שבדומה למה שראינו בהרצאה, מתקיים $E[f(C_0)] = X_i(\hat{C})$.

עבור הגדרת $C_{\min}$ ו- $C_{\max}$, נגדיר את $S_{C, \tilde{C}}$ להיות קבוצת המבנים $C' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ שעבורם $C'|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}$ וכן $C'|_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_i} = C|_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_i}$. נשים לב שבפרט $C_0 \in S_{C, \tilde{C}}$. עתה נגדיר את $C_{\max}$ להיות איבר מתוך $S_{C, \tilde{C}}$ שעבורו $f(C_{\max}) = \max\{f(C') : C' \in S_{C, \tilde{C}}\}$ (אם יש יותר מאיבר אחד שמקבל את המקסימום או בוחרים אחד מהם שרירותית), ונגדיר את $C_{\min}$ להיות איבר מ- $S_{C, \tilde{C}}$ שעבורו $f(C_{\min}) = \min\{f(C') : C' \in S_{C, \tilde{C}}\}$.

לפי הנתונים של השאלה, תמיד מתקיים $f(C_{\max}) \leq 1 + f(C_{\min})$. זאת כי הדבר מתקיים לכל זוג איברים מ- $S_{C, \tilde{C}}$, שכן כל איברי הקבוצה הזו נבדלים על $\mathcal{D}_i \setminus \mathcal{D}_{i-1}$ בלבד. לכן, כאשר מגדילים את C , מתקיים $E[f(C_{\max})] \leq 1 + E[f(C_{\min})]$. לבסוף, בגלל שלכל C מתקיים $f(C_{\min}) \leq f(C_0) \leq f(C_{\max})$, יתקיים גם $E[f(C_{\min})] \leq E[f(C_0)] = X_i(\hat{C}) \leq E[f(C_{\max})]$. מכיוון שזה נכון לכל $\hat{C}$ שעבורו $\hat{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}$ נובע מכך המבוקש:

$$\begin{aligned} \max\{X_i(\hat{C}) : \hat{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}\} &\leq E[f(C_{\max})] \\ &\leq 1 + E[f(C_{\min})] \leq 1 + \min\{X_i(\hat{C}) : \hat{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}\} \end{aligned}$$

למתוח את הקשר

גם כאן נחסום לכל קבוצה U את ההסתברות שלא יהיו קשתות בין U ל- V . עם זאת, על מנת לתרגם חסמים כאלו לחסם גלובלי על כל המאורעות (בעיקר עבור קבוצות בנות איבר בודד) לא מספיק יהיה להשתמש באיחוד מאורעות. תחת זאת נשתמש במשפט FKG כפי שמשמשים בו בשאלה "חיתוך של מאורעות" מהפרק על קורלציות בחוברת התרגילים. לכל $U \subset V$ שמקיים $1 \leq |U| \leq \frac{n}{2}$ נסמן ב- A_U את המאורע שיש לפחות קשת אחת בין U ל- $V \setminus U$, ואז ההסתברות שהגרף יהיה קשיר תהיה שווה להסתברות חיתוך כל המאורעות הנ"ל, שלפי משפט FKG חסומה מלמטה ע"י $\prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \Pr[A_{U_k}] = \prod_{|U|=k} \Pr[A_U]$. עבור U בודד מגודל k , מתקיים:

$$\begin{aligned} \Pr[A_U] &= 1 - \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)^{k(n-k)} \geq 1 - e^{-k(n-k)\ln(n)/n} \\ &\geq \exp(-e^{-k(n-k)\ln(n)/n} - \frac{1}{2}e^{-2k(n-k)\ln(n)/n}) \geq \exp(-\frac{1}{2}e^{-k(n-k)\ln(n)/n}) \end{aligned}$$

על כן, ההסתברות של גרף מקרי המוגרל לפי $G(n, \frac{\ln(n)}{n})$ להיות קשיר היא לפחות

$$\prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \prod_{|U|=k} \Pr[A_U] \geq \exp(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} e^{-k(n-k) \ln(n)/n}) \geq \exp(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (\frac{en}{k})^k e^{-k(n-k) \ln(n)/n})$$

על מנת להשלים את השאלה, כל שנותר הוא להוכיח, עבור n גדול מספיק, חסם עליון גלובלי קבוע על הסכום $\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (\frac{en}{k})^k e^{-k(n-k) \ln(n)/n} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \exp(k + \frac{k^2 \ln(n)}{n} - k \ln k)$. נפצל את הטיפול לכל k קבוע שמקיים $1 \leq k \leq K$ עבור $K = \lceil e^6 \rceil$ (למשל $K = \lceil e^6 \rceil$), ולשאר הסכום.

עבור כל $1 \leq k \leq K$ קבוע, פשוט נשים לב שהביטוי $\exp(k + \frac{k^2 \ln(n)}{n} - k \ln k)$ שואף לקבוע, ולכן בפרט יהיה לנו חסם עליון קבוע על $\sum_{k=1}^K \exp(k + \frac{k^2 \ln(n)}{n} - k \ln k)$.

עבור $K \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ראשית נטען שעבור n גדול מקבוע מתאים (לא תלוי k) מתקיים $\frac{k \ln(n)}{n} \leq \frac{2 \ln(k)}{3}$. לשם כך נחפש מקסימום של הביטוי $\frac{k \ln(n)}{n} - \frac{2 \ln(k)}{3}$: נגזור אותו לפי k פעמיים ונקבל את הביטוי $2/3k^2$ שהוא חיובי בתחום הרלוונטי, ולכן המקסימום יכול להתקבל רק בקצוות, $k = K$ ו- $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. כאשר n גדול דיו הביטוי $\frac{K \ln(n)}{n} - \frac{2 \ln(K)}{3}$ הוא שלילי, בעוד שמתקיים $\frac{K \ln(n)}{n} - \frac{2 \ln(K)}{3} \leq \frac{\ln(n)}{2} - \frac{2 \ln(n)}{3} + 1 \leq 0$, $\frac{\lfloor n/2 \rfloor \ln(n)}{n} - \frac{2 \ln(\lfloor n/3 \rfloor)}{3} \leq \frac{\ln(n)}{2} - \frac{2 \ln(n)}{3} + 1 \leq 0$. ובזאת הוכחנו את החסם.

מחסם זה נובע $\sum_{k=K}^{\lfloor n/2 \rfloor} \exp(k + \frac{k^2 \ln(n)}{n} - k \ln(k)) \leq \sum_{k=K}^{\lfloor n/2 \rfloor} \exp(k - \frac{1}{3} k \ln(k)) \leq \sum_{k=K}^{\infty} e^{-k \ln(k)/6}$ והסכום הימני שואף לקבוע. בזאת הושלם החלק האחרון בהוכחה.

הערות: גם כאן יש שיטות אלטרנטיביות לעשות את החסמים, כולל שיטות "היברידיות" שמשמשות בחסם יותר פשוט של איחוד מאורעות עבור k יותר גדולים ובקורלציות רק עבור k הקטנים ביותר (או אפילו רק $k = 1$, ז"א בנוגע לסיכוי שקיימים צמתים מבודדים). ידוע (עם הוכחה יותר מדוקדקת) שההסתברות לקבל גרף קשיר בהגרלה לפי $G(n, \frac{\ln(n)}{n})$ שואפת ל- e^{-1} .

החשובים הנחשבים

נגדיר מ"מ $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ לפי $X(s) = \log(1/\mu(s))$ לכל $s \in S$ (כאשר במקרה של $\mu(s) = 0$ נגדיר את $X(s)$ להיות ערך שרירותי גבוה מספיק, במקרה שלנו גבוה מ- $H[\mu]/\epsilon$). כזכור מהגדרת האנטרופיה בשיעור מתקיים $H[\mu] = E_{s \sim \mu}[X(s)]$, ולכן מאי-שוויון מרקוב מתקיים $\Pr_{s \sim \mu}[X(s) \geq H[\mu]/\epsilon] \leq \epsilon$. נגדיר אם כן את הקבוצה $S' = \{s \in S : X(s) \leq H[\mu]/\epsilon\} = \{s \in S : \mu(s) \geq 2^{-H[\mu]/\epsilon}\}$. לפי חסם ההסתברות מלמעלה (שהוא על המשלים של S') מתקיים $\Pr[S'] \geq 1 - \epsilon$. לבסוף, מכיוון שמתקיים $|S'| \leq 2^{H[\mu]/\epsilon}$ חייב להתקיים $|S'| \cdot 2^{-H[\mu]/\epsilon} \leq \sum_{s \in S'} \mu(s) = \Pr[S'] \leq 1$ כנדרש.