

הערה: אנחנו נשתמש בתרגיל הזה (וגם בהמשך הקורס), עבור קבוצה S , בסימון $\mathcal{P}(S)$ עבור קבוצת החזקה של S (ז"א קבוצת כל תתי-קבוצה של A).

עולה עולה (8 נקודות)

עבור קבוצה S , לכל $1 \leq p \leq 1$ נגדיר את מרחב ההסתברות μ_p מעל קבוצת החזקה של $\mathcal{P}(S)$ באופן הבא: על מנת להגריל את $A \subseteq S$, לכל $a \in S$ נכליל את a ב- A בהסתברות p בדיוק, באופן ב"ת לחלוטין באיברים האחרים. במילים אחרות, $\mu_p(A) = p^{|A|}(1-p)^{|S|-|A|}$.

עבור משפחה של קבוצות $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$, נגיד שהיא מונוטונית לא יורדת אם לכל $A \in \mathcal{A}$ ולכל $A \subseteq B \subseteq S$ מתקיים גם $B \in \mathcal{A}$. הראו שעבור קבוצה $\mathcal{A}$ מונוטונית לא יורדת שאינה שווה ל- $\mathcal{P}(S)$ ואינה ריקה, לכל $0 \leq p < q \leq 1$ מתקיים $\Pr_{\mu_p}[\mathcal{A}] < \Pr_{\mu_q}[\mathcal{A}]$. במילים אחרות, הסיכוי להגריל איבר מ- $\mathcal{A}$ עולה כשעוברים מהגרלה לפי p להגרלה לפי q .

הערות: הוכחה שמתקיים $\Pr_{\mu_p}[\mathcal{A}] \leq \Pr_{\mu_q}[\mathcal{A}]$ (עם אופציה לשוויון) שווה 6 נקודות. שימו לב שבמקרה הפרטי שבו S הוא קבוצת כל הזוגות מתוך $V = \{1, \dots, n\}$, המרחב μ_p זהה למרחב הגרפים המקריים $G(n, p)$ שהגדרנו בשיעור.

לפעמים קורה (6 נקודות)

נתון מרחב הסתברות שבו מוגדרים המאורעות $A_1, \dots, A_k$. הראו שמתקיים עבור האיחוד שלהם החסם התחתון $\Pr[\bigvee_{1 \leq i \leq k} A_i] \geq \sum_{1 \leq i \leq k} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k} \Pr[A_i \wedge A_j]$.

הערה: כן, זהו מקרה פרטי של עיקרון ההכלה וההפרדה, אבל הוכחות שפשוט מצטטות את עיקרון ההכלה וההפרדה לא יתקבלו. אלא אם כן אתם מתכוונים להוכיח כאן (ובמילים שלכם) גם את העיקרון המלא.

הכל קשור (8 נקודות)

הראו שהדבר הבא מתקיים לכל $\alpha > 1$ קבוע: אם נגריל גרף מעל n צמתים לפי המרחב $G(n, \alpha \ln(n)/n)$ (שימו לב ללוגריתם בבסיס טבעי שם), אז הגרף יהיה קשיר בהסתברות $1 - o(1)$ (ז"א שהסתברות לאי-קשירות שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף).

הערה ורמז: עבור 6 נקודות אפשר להוכיח את טענה השאלה רק עבור כל $\alpha > 2$. שימוש בהגדרה הישירה של קשירות לפי המצאות מסלול בין כל שתי נקודות היא לא השיטה המומלצת לפתור את השאלה.

בלי אורך רוח (6 נקודות)

נגריל מחרוזת $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ מאורך n ע"י כך שלכל i נגריל את x_i באופן יוניפורמי וב"ת באחרים מ- $\{0, 1\}$. יהי X המ"מ שמקבל את ה- m המקסימלי שעבורו x מכילה סדרה של m אפסים רצופים (ז"א שקיים $1 \leq i \leq n+1-m$ כך ש- $x_j = 0$ לכל $j \leq i+1+m$). במקרה הקצה ש- x לא מכילה אפסים כלל נקבע $X = 0$. הראו שמתקיים $E[X] \leq \log n + O(1)$.

הערות: כרגיל בקורס הלוגריתם הוא בבסיס 2. שימו לב שדרישת ההוכחה כאן שונה מהדרישה היותר קלה של $E[X] \leq (1 + o(1)) \log n$, או האפילו עוד יותר קלה של $E[X] = O(\log n)$. עבור הוכחה של חסם מעין אלו תקבלו ניקוד חלקי בלבד.

עם אורך רוח (9 נקודות)

עבור ההגרלה והמ"מ של השאלה "בלי אורך רוח", הוכיחו עתה שמתקיים $E[X] \geq \log n - O(1)$.

הדרכה: שיטה אחת לעשות את זה היא באמצעות הסתכלות על הגרלה אלטרנטיבית של המחרוזות, ע"י כך שמגרילים את מספר האפסים בין כל שני ביטים שווים ל-1 שנמצאים בה (עם ההתפלגויות המתאימות): כעיקרון לוקחים שרשור של הרבה רצפים כאלה אבל אחר כך "מקצצים" את כל מה שנמצא אחרי n הביטים הראשונים. ניתן קודם כל להוכיח את חסם התוחלת בהינתן המאורע שגם אחרי הקיצוץ כמות מספקת של רצפים נשארו רלוונטים, ואח"כ להרחיב אותו לחסם על התוחלת הלא מותנה. אם אתם משתמשים בשיטה זו, עליכם יהיה להסביר מדוע ההגרלה האלטרנטיבית גם נותנת התפלגות יוניפורמית עבור x .

הערות: מותר לכם להשתמש בלי הוכחה בטענה ש- x מכילה לפחות $n/4$ אחדות בהסתברות $1 - e^{-\Omega(n)}$ (אנחנו עוד נלמד על חסמים כאלה, אבל בשביל טענה זו אפשר למשל להשתמש בחסם הבינום $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$). אפשר לקבל כאן ניקוד חלקי עבור הוכחה שמתקיים $E[X] \geq (1 - o(1)) \log n$, אבל אל תצפו לניקוד כל שהוא עבור הוכחה של $E[X] \geq \Omega(\log n)$ בלבד.

מקהלה עליזה (9 נקודות)

הראו שלכל $0 < \alpha < 1$ קיים $0 < \beta < 1$ (שתלוי רק ב- α) עם התכונה הבאה: נניח שעבור n טבעי כל שהוא $X_0, \dots, X_n$ הם משתנים מקריים, לא ב"ת, שכל אחד מהם לחוד מתפלג יוניפורמית מעל $\{-1, 1\}$. נניח גם שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $|\text{Cov}[X_0, X_i]| \geq \alpha$. תחת הנחות אלו יהיו לפחות βn^2 זוגות $1 \leq i, j \leq n$ שעבורם $\text{Cov}[X_i, X_j] \geq \beta$.

הערה ורמז: שימו לב שיש סימן ערך מוחלט על התנאי של השאלה, אבל אין סימן כזה על התוצאה שאתם צריכים להוכיח. שיטה אחת להוכיח אותה עוברת דרך הוכחת חסם תחתון על $V[\sum_{i \in S} X_i]$ עבור קבוצה מתאימה $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ שתגדירו לצורך ההוכחה.

הערה: עבור חלק מהשאלות, בנוסף לחסם $(1-x) \leq e^{-x}$ שכבר ידוע לכם, כדאי לשים לב גם לחסם $(1-x) \geq e^{-x-x^2/2}$. לסקרנים מבינים, ניתן להראות את החסם הנ"ל ע"י הסתכלות על פיתוח של $\ln(1-x)$ כטור חזקות. דרך אגב, החסמים הנ"ל נכונים גם ל- x שליליים.

זאב בודד (9 נקודות)

עבור הגרף המקרי $G(n, \ln(n)/n)$, הראו שבהסתברות $\Omega(1)$ יהיה לפחות צומת אחד ללא שכנים (ובפרט הגרף לא יהיה קשיר).

הערה ורמז: משמעות השאלה היא שיש להראות חסם תחתון קבוע (לא תלוי n) גדול מאפס על ההסתברות הנ"ל, שתקף לכל n גדול דיו. עוזר לפתח ביטוי עבור תוחלת מספר הצמתים חסרי השכנים. תוחלת זו שואפת ל-1, וניתן להראות שמרבית ה"תרומה" לתוחלת לא מגיעה ממקרים עם מספר רב של צמתים כאלו.

לערכב היטב (8 נקודות)

נתון $G(V, E)$ הוא גרף (לא מקרי אלא קבוע מראש) עם n קשתות ו- $p \binom{n}{2}$ קשתות (כאשר גם p קבוע מראש). נגדיל פרמוטציה σ מעל קבוצת הצמתים V , ונסתכל על הגרף המתקבל מהפעלתו, $G_\sigma(V, E_\sigma)$, כאשר $E_\sigma = \{\sigma(u)\sigma(v) : uv \in E\}$. הוכיחו שלכל $\alpha > 0$ קבוצת החיתוך $E \cap E_\sigma$ מקיימת $|E \cap E_\sigma| = (p^2 \pm \alpha) \binom{n}{2}$ בהסתברות לפחות $1 - 2e^{-\alpha^2 n/2}$.

הערות: חסם של $1 - e^{-\Theta(\alpha^2 n)}$ יזכה ב-6 נקודות. המקרים שהחסם קרוב לאמת הם כאשר יש יחסית הרבה פרמוטציות שלא משנות בהרבה את קבוצת הקשתות, למשל גרף שהוא איחוד שני קליקים שווי-גודל ורים.

לימונדה (6 נקודות)

נניח ש- $X_0, \dots, X_m$ הוא מרטינגל חשיפה של פונקציה f שמוגדר לפי התפלגות μ מעל מרחב הפונקציות $\mathcal{D}^m$ ל- $\mathcal{R}$, עם סדר חשיפה $\emptyset = \mathcal{D}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}_m = \mathcal{D}$. נניח גם ש- μ היא התפלגות מכפלה (לכל $d \in \mathcal{D}$ מגדילים את $C(d) \in \mathcal{R}$ באופן ב"ת בהגרלות האחרות), וגם שלכל $1 \leq i \leq m$ ולכל $C_1, C_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ שנבדלות ביניהם רק על $\mathcal{D}_i \setminus \mathcal{D}_{i-1}$ מתקיים $|f(C_1) - f(C_2)| \leq 1$. הראו שלכל $1 \leq i \leq m$ ולכל $\tilde{C} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ המתקבל בהסתברות חיובית מתקיים $\max\{X_i(\hat{C}) : \hat{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}\} \leq 1 + \min\{X_i(\hat{C}) : \hat{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}} = \tilde{C}|_{\mathcal{D}_{i-1}}\}$.

הערה: מהתוצאה שאתם מוכיחים כאן אפשר להוכיח, בשיטה מאוד דומה לשאלה "לסחוט את הלימון" מחוברת התרגילים (תוך ניתוח המרטינגל המוגדר ע"י $(X'_i = X_i - X_0)$, שבתנאים אלו מתקיים חסם ההסתברות $\Pr[X_m > X_0 + a] < e^{-2a^2/m}$).

למתוח את הקשר (9 נקודות)

עבור הגרף המקרי $G(n, \ln(n)/n)$, הראו שבהסתברות $\Omega(1)$ (אבל שלא שואפת ל-1) הגרף יהיה קשיר. רמז: לשם כך תעזור לכם שיטה הסתברותית שנלמדה בחלק מאוחר יחסית של הקורס.

החשובים הנחשבים (6 נקודות)

עבור מרחב הסתברות μ מעל קבוצה סופית S ועבור $\epsilon > 0$ כל שהוא, הראו שקיימת תת-קבוצה $S' \subseteq S$ שמקיימת $\Pr_\mu[S'] \geq 1 - \epsilon$ וכן $|S'| \leq 2^{H[\mu]/\epsilon}$.