

חוזר חלילה (9 נקודות)

פונקציה $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ תיקרא מחזורית אם קיים $1 \leq k \leq n/2$, שעבורו לכל $1 \leq i \leq n - k$ מתקיים $f(i) = f(i + k)$. הראו שקיימת בדיקה עם שגיאה חד-כיוונית למחזוריות (צריך לקבל בהסתברות 1 קלט מחזורי ולדחות בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ קלט ϵ -רחוק ממחזוריות) שמבצעת $O(\sqrt{n \log(n)/\epsilon})$ שאילתות. שימו לב שסימן השורש הריבועי "עוטף" את כל הביטוי ב- n ו- ϵ .

הערה: לא חובה להשתמש בשאלה "לבלוע את החוכמה" הנלמדת בתרגול, אבל היא יכולה לעשות את הניתוח יותר נוח.

לשיר סולו (9 נקודות)

השאלה הזו מתייחסת לאלגוריתמים שעובדים על פונקציה $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, כאשר אנחנו מזהים את $\{0, 1\}$ עם איברי השדה $\mathbb{Z}_2$.

כתבו אלגוריתם שעובד על פונקציות לינאריות, מבצע מספר קבוע של שאילתות, ושבהסתברות $\frac{2}{3}$ מבחין בין המקרה ש- f היא פונקצית ה-0 או פונקציה מהצורה $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ עבור $1 \leq i \leq n$ קבוע כל שהוא ("פונקצית דיקטטור"). לבין המקרה ש- f היא פונקציה לינארית אחרת (התלויה ביותר ממשתנה בודד). לאלגוריתם מותר לתת תשובה שרירותית בכל הסתברות שהיא עבור פונקציה לא לינארית.

לרקוד סולו (9 נקודות)

השאלה הזו מתייחסת לאלגוריתמים שעובדים על פונקציה $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. כתבו אלגוריתם ϵ -בדיקה עבור התכונה ש- f היא פונקצית ה-0 או פונקציה מהצורה $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ שמבצע מספר קבוע (תלוי רק ב- ϵ) של שאילתות. בניגוד לשאלה "לשיר סולו" מהתרגיל הקודם, כאן צריך אלגוריתם שמקיים את התנאים של אלגוריתם בדיקה גם עבור פונקציות לא לינאריות.

הערות: אפשר להשתמש בכל דבר שנלמד בקורס, וגם בתוצאת השאלה "לשיר סולו" מהתרגיל הקודם (בין אם פתרם אותה ובין אם לאו). עם זאת ראוי להזהיר כאן שיש "מוקש" בשאלה הזו, ומומלץ להיזהר מ"הפעלה עיוורת" של התוצאה מהתרגיל הקודם ללא מהלך נוסף. לאלגוריתם של הפתרון הרשמי עדיין חסר משהו.

השילוש (9 נקודות)

כתבו, במודל הגרפים הצפוף, אלגוריתם בדיקה של גרף בעל $3n$ צמתים עבור התכונה שהוא איזומורפי לגרף התלת-צדדי השלם המאוזן עם n צמתים בכל צד (זהו למשל הגרף עם קבוצת צמתים $\{1, \dots, 3n\}$ שבו יש קשת בין i ל- j אם ורק אם $\lceil i/n \rceil \neq \lceil j/n \rceil$). מספר השאילתות של האלגוריתם חייב להיות $O(1/\epsilon^2)$, כאשר ϵ הוא פרמטר המרחק של הבדיקה.

הערה חשובה: תשובה בסגנון "זהו מקרה פרטי של בדיקת איזומורפיזם לגרף k -מחולק" לא תתקבל. ההוכחה המלאה של הבדיקה הנ"ל לא נלמדה בקורס. עליכם לכתוב בדיקה שתעבוד עבור המקרה הפרטי כאן ללא הסתמכות על משפטים שלא למדתם את ההוכחה שלהם (וחוץ מזה שימוש במקרה הכללי לא יבטיח כזו תלות טובה ב- ϵ).

שילוש באחד (9 נקודות)

האלגוריתם של השאלה "השילוש" מהתרגיל הקודם הוא בעל שגיאה דו-צדדית. הסבירו מדוע אלגוריתם $\frac{1}{2}$ -בדיקה בעל שגיאה חד-צדדית לתכונה הזו חייב לבצע מספר שאילתות שהוא $\Omega(n)$, וכן כתבו (והוכיחו) אלגוריתם ϵ -בדיקה עם שגיאה חד-צדדית שמבצע $O(n)$ שאילתות לכל ϵ קבוע (אם היינו כותבים במפורש גם את התלות ב- ϵ אז אפשר לדאוג שהיא תהיה פולינומית ב- $1/\epsilon$ לכל n קבוע).

הערה: ההסבר של $\Omega(n)$ שווה 3 נקודות, והאלגוריתם (עם הוכחה) של $O(n)$ שווה 6 נקודות.

אדפטיביות בסדר (9 נקודות)

נניח שאנחנו רוצים לבדוק מונוטוניות עבור פונקציה $f : D \rightarrow R$, כאשר D הוא סדר חלקי כל שהוא (לא נתון עליו כלום), ו- R יכול להיות סדר מלא אינסופי (אפשר לצורך העניין להניח למשל $R = \mathbb{N}$). הראו שניתן לתרגם כל אלגוריתם ϵ -בדיקה אדפטיבי מבוסס-סדר בעל q שאילתות לאלגוריתם ϵ -בדיקה לא-אדפטיבי שמבצע $((1 + o(1))q)!$.

תזכורות והבהרות: אלגוריתם מבוסס סדר (כפי שהוגדר בשיעור) לא מקבל ישירות את ערכי f על השאילתות שלו, אבל כל פעם שהוא מבצע שאילתה חדשה במקום i הוא יקבל תשובה האם $f(i)$ גדול, שווה או קטן מהערך $f(j)$ לכל j שבוצעה עליו שאילתה בעבר. משמעות הביטוי " $((1 + o(1))q)!$ " הוא שלכל $\alpha > 1$ ולכל q גדול מ- T_α מתאים, האלגוריתם יבצע לא יותר מ- $(\lceil \alpha q \rceil)!$ שאילתות.

שולים מוקש (6 נקודות)

נתון גרף קבוע "אסור" H בעל $m \geq 2$ צמתים ודרגה חסומה d . נתון גם H הוא קשיר. הראו שלכל ϵ קיים אלגוריתם ϵ -בדיקה במודל הדליל של גרפים עם דרגה חסומה d , עבור התכונה של אי-הכלה של תת-גרף (לא בהכרח מושרה) איזומורפי ל- H , שמבצע מספר שאילות שאינו תלוי במספר הצמתים של הגרף הנבדק (מספר השאילות כן יכולה להיות תלוי ב- ϵ , m ו- d).

שולים מוקשים (9 נקודות)

הראו, עבור משפחה סופית $H_1, \dots, H_k$ של גרפים עם דרגה חסומה d , שלא בהכרח חייבים להיות קשירים אבל עדיין חייבים להיות ללא צמתים מבודדים (ז"א ללא צמתים נטולי שכנים), שקיים אלגוריתם ϵ -בדיקה במודל הדליל של גרפים מדרגה חסומה d עבור התכונה של אי-הכלה של אף תת-גרף איזומורפי לגרף מתוך המשפחה, במספר שאילות שאינו תלוי במספר הצמתים של הגרף הנבדק (אבל יכול להיות תלוי ב- ϵ , d ו- $H_1, \dots, H_k$). בעת בניית הבדיקה מותר להניח גם ש- n גדול מקבוע N שתלוי רק ב- ϵ , d ו- $H_1, \dots, H_k$ (עבור n קטן מ- N אפשר פשוט לקרוא את כל הגרף ולתת תשובה).

הבהרות: מותר להשתמש בתוצאת השאלה הקודמת גם אם לא הצלחתם לפתור אותה. כמו כן, אפשר עבור 6 נקודות להוכיח את הטענה כאן עבור $k = 1$ בלבד (שזה אותו דבר כמו להכליל את תוצאת השאלה הקודמת גם עבור H שאינו קשיר).

עולים על מוקש (3 נקודות)

תנו דוגמה שבה אי אפשר לבצע בדיקה במספר שאילות שאינו תלוי במספר הצמתים של הגרף הנבדק, כאשר המדובר הוא במשפחה בת-מניה (אבל לא סופית) של גרפים אסורים $H_1, H_2, \dots$.

לינאריות באמת (12 נקודות)

עבור שדה סופי $\mathbb{F}$, שאינו בהכרח מהצורה $\mathbb{Z}_p$ עבור מספר ראשוני p , כתבו והוכיחו אלגוריתם בדיקה עבור התכונה שפונקציה $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ היא לינארית (לא רק חיבורית - נזכיר שפונקציה חיבורית מקיימת $f(u+v) = f(u) + f(v)$ לכל $u, v \in \mathbb{F}^n$ בעוד שפונקציה לינארית חייבת גם לקיים $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ו- $u \in \mathbb{F}^n$). על האלגוריתם לבצע מספר קבוע של שאילות (לא תלוי ב- ϵ , n או $\mathbb{F}$), לקבל פונקציה לינארית בהסתברות 1, ועבור כל ϵ קטן מקבוע מתאים, לדחות כל פונקציה ϵ -רחוקה מלינאריות בהסתברות לפחות $\Omega(\epsilon)$.

הערות והדרכה: אפשרות אחת היא לבצע סבב אחד של הבדיקה שלמדתם בשיעור עבור חיבוריות (ואפשר גם לצטט בלי להוכיח את הטענות שנלמדו על הסתברות הדחיה של פונקציות רחוקות מחיבוריות), ואז לבצע סבב של בדיקה נוספת אחרת. אפשר גם לוודא לחוד שמתקיים $f(0) = 0$ (זה לוקח שאילות בודדת, ויכול לפשט טיפה את הניתוח).