פתרונות לתרגיל הראשון

הכל על הכל

עבור קבוע $C \geq 1$ שיקבע בהמשך, בהינתן n ו־k נגריל משפחה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ שגודלה יהיה (תמיד) חסום ע"י $C \cdot k2^k \log n$, ונראה שבהסתברות חיובית היא תקיים את התנאים המבוקשים מהקבוצה $\mathcal{F}_{k,n}$. לשם כך, עבור $s = \lfloor C \cdot k2^k \log n \rfloor \geq \frac{1}{2} C \cdot k2^k \log n$, נגריל באופן יוניפורמי וב"ת לחלוטין קבוצות $B_1,\ldots,B_s$, ונגדיר $\mathcal{F} = \{B_1,\ldots,B_s\}$ (לאחר מחיקת כפילויות אם יש).

לכל $A \subset \{1,\ldots,n\}$ מגודל k ולכל $B \subseteq A$, נחשב את הסיכוי שלא קיים $1 \leq i \leq s$ שעבורו $B_i \cap A = B$. עבור i בודד ההסתברות עבור המאורע $B_i \cap A = B$ היא 2^{-k} בדיוק (כי $B_i \cap A$ מתפלג יוניפורמית מעל כל תתי־הקבוצה האפשריים של A), ולכן הסיכוי שאין i שמקיים את זה הוא $(1-2^{-k})^s < e^{-s2^{-k}} \leq e^{-\frac{1}{2}Ck\log n}$. עבור $C = 4\ln(2)$ הסתברות זו חסומה ע"י $1/\binom{n}{k}2^k < n^{-2k}$. מכיוון שמספר הזוגות של $A \subset \{1,\ldots,n\}$ מגודל k ו־$B \subseteq A$ הוא בדיוק $\binom{n}{k}2^k$, מאיחוד מאורעות אנחנו מקבלים שבהסתברות חיובית לכל זוג A, B כזה קיים i שעבורו $B_i \cap A = B$, מה שאומר ש־$\mathcal{F}$ מקיימת את המבוקש, $\mathcal{F}|_A = \mathcal{P}(A)$ לכל A מגודל k.

קואליציה רחבה

לכל תת־קבוצה $I \subset \{1,\ldots,10m\}$ שעבורה $|I| \leq m$, נגדיר את B_I כמאורע ש־I "ממחיש את המקסימום של f עבור ת"ק של $\{X_1,\ldots,X_{10m}\}$", ז"א שמתקיים $f(\{X_i : i \in I\}) = \max_{J \subseteq \{1,\ldots,10m\}} f(\{X_i : i \in J\})$. נראה עתה שמתקיים $\Pr[B_I] \leq 2^{-9m}$ לכל I. לשם כך נראה שלכל סדרה $\langle a_i : i \in I \rangle$ של ערכים מ־S מתקיים $\Pr[B_I | \forall_{i\in I} X_i = a_i] \leq 2^{-9m}$, ומכך נובע המבוקש לפי נוסחת ההסתברות השלמה.

בהנתן הסדרה $\langle a_i : i \in I \rangle$, אם $f(\{X_i : i \in I\}) < \max_{J \subseteq I} f(\{X_i : i \in J\})$ אז בבירור מתקיים $\Pr[B_I | \forall_{i\in I} X_i = a_i] = 0$, ולכן מעתה נתמקד במקרה $f(\{X_i : i \in I\}) = \max_{J \subseteq I} f(\{X_i : i \in J\})$.

עתה נגדיר לכל $j \in \{1,\ldots,10m\} \setminus I$ את המאורע $B_{I,j}$, "אי אפשר להגדיל את הערך של I ע"י שימוש ב־j", שבאופן פורמלי מתקיים אם $f(\{X_i : i \in I\}) = \max_{J \subseteq I \cup \{j\}} f(\{X_i : i \in J\})$. נשים לב שעבור המאורעות האלו מתקיים $\Pr[B_I | \forall_{i\in I} X_i = a_i] \leq \Pr[\bigwedge_{j \in \{1,\ldots,10m\} \setminus I} B_{I,j} | \forall_{i\in I} X_i = a_i]$ (כי בפרט B_I גורר את $B_{I,j}$ לכל j). מתקיים גם $\Pr[B_{I,j} | \forall_{i\in I} X_i = a_i] \leq \frac{1}{2}$ לפי הנתון מהשאלה (עם $A = \{a_i : i \in I\}$). תחת ההתניה על הערכים של X_i עבור $i \in I$ על המאורעות האלו הם ב"ת (כי $B_{I,j}$ תחת ההתניה הנ"ל תלוי רק ב־X_j, ונתון שהערכים של $X_1,\ldots,X_{10m}$ נבחרים באופן ב"ת לחלוטין). על כן $\Pr[\bigwedge_{j \in \{1,\ldots,10m\} \setminus I} B_{I,j} | \forall_{i\in I} X_i = a_i] = \prod_{j \in \{1,\ldots,10m\} \setminus I} \Pr[B_{I,j} | \forall_{i\in I} X_i = a_i] \leq 2^{-9m}$.

עתה שהוכחנו את $\Pr[B_I | \forall_{i\in I} X_i = a_i] \leq 2^{-9m}$, נשים לב שמספר ה־$I$ האפשריים בהגדרת המאורע הוא $\sum_{k=0}^{m} \binom{10m}{k} \leq \binom{11m}{m} \leq (\frac{11em}{m})^m < 2^{8m}$, ולכן בהסתברות גדולה מ־$\frac{1}{2}$ אף B_I לא מתקיים. כאשר זה קורה, המקסימום $\max_{J \subseteq \{1,\ldots,10m\}} f(\{X_i : i \in J\})$ חייב להיות מושג ע"י קבוצה J שגודלה גדול מ־m. עבור קבוצה זו בפרט מתקיים $f(\{X_i : i \in J\}) > f(\emptyset) \geq 0$, ז"א שעבור הקבוצה J מתקבל ערך חיובי.

דין פרוטה כדין מאה

אפשר לפתור את השאלה ע"י חישוב ישיר (ולקבל את הנקודות), אבל יותר מעניין להשתמש באינדוקציה: הבסיס $n = 1$ ברור. אם נתון שטענת השאלה מתקיימת עבור $n-1$, נראה איך היא מתקיימת עבור n. ננתח את ההיקף של האיבר 1 בפרמוטציה מקרית $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, ונסמן אותו במשתנה המקרי Y. בהסתברות $\frac{1}{n}$, מתקיים $\sigma(1) = 1$ ואז $Y = 1$ (וזה המקרה היחידי שבו $Y = 1$). ננתח עתה את ההתפלגות של Y כאשר אנחנו מתנים את מרחב ההסתברות על $\sigma(1) = i \neq 1$.

במקרה הזה נגדיר את הפרמוטציה $\sigma' : \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\} \to \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}$ לפי $\sigma'(1) = \sigma(i)$, כאשר לכל $j \in \{2,\ldots,n\} \setminus \{i\}$ "משאירים" $\sigma'(j) = \sigma(j)$. אתם מוזמנים לוודא שזו אכן פרמוטציה, ושהיא מתפלגת

יוניפורמית כאשר σ היא פרמוטציה שמתפלגת יוניפורמית תחת ההתניה $i = \sigma(1)$. על כן, אם נסמן ב־Y' את ההיקף של 1 בפרמוטציה σ' (מ"מ זה מוגדר רק תחת ההתניה $i = \sigma(1)$), לפי הנחת האינדוקציה Y' מתפלג יוניפורמית מעל $\{1, \ldots, n-1\}$. ניתן גם לוודא שמתקיים $Y = Y' + 1$, ולכן לכל $k \in \{2, \ldots n\}$ מתקיים (תחת ההתניה) $\Pr[Y = k] = \frac{1}{n-1}$. מכיוון שמתקיים (ללא התניה) $\Pr[\sigma(1) \neq 1] = \frac{n-1}{n}$, נובע מכך $\Pr[Y = k] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$, ולכן Y אכן מתפלג יוניפורמית מעל $\{1, \ldots, n\}$.

הלינאריות הלא־נכונה

נגדיר ראשית את $X_1, X_2, \ldots$ להיות מ"מ ב"ת לחלוטין שכל אחד מהם מקבל 1 בהסתברות $\frac{2}{3}$ ומקבל 0 בהסתברות $\frac{1}{3}$ (ולכן אלו מקיימים את הסעיף השני בשאלה). עתה נגדיר את Y להיות המ"מ שמקבל את האינדכס הכי קטן i שעבורו $X_i = 1$, ז"א $Y = \min\{i \in \mathbb{N} : X_i = 1\}$. הביטוי הזה מוגדר (המינימום הוא מעל קבוצה לא ריקה) בהסתברות 1. המשתנה Y מקיים $\Pr[Y = k] = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}$ (זוהי ההתפלגות הגיאומטרית עם פרמטר $\frac{1}{3}$), ובפרט יש לו הסתברות חיובית לקבל כל מספר טבעי. גם לא קשה לראות שהתוחלת שלו סופית (ושווה ל־$\frac{3}{2}$).

הדבר האחרון לשים לב הוא שבהתניה על $Y = k$ מתקיים $\sum_{i=1}^{k} X_i = 1$ בהסתברות 1, כי אם $Y = k$ אז $X_k = 1$ וגם $X_i = 0$ לכל $i < k$. על כן $\mathrm{E}[Z|Y = k] = 1$, ומצד שני $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}[X_i] = \frac{2k}{3}$, וזה מספר שאינו שווה ל־1 לאף k.

פתרונות לתרגיל השני

איזונים ובלמים

עבור הטענה שבהדרכה, $\mathrm{E}[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|] = \mathrm{E}[|T_i|/|S_i|]$ (במקרה ש־$f|_{S_i}$ מקבל את שני הערכים האפשריים), דבר ראשון מראים שהיא מתקיימת לכל התניה אפשרית על זהות הקבוצה $S_i = A \subseteq S_0$ יחד עם ההתניה $|S_{i+1}| = k$ עבור $0 < k < |A|$ (אי־השוויון מבטיח שההתניה קורית בהסתברות חיובית).

תחת ההתניות האלו, הבחירה של S_{i+1} היא יוניפורמית מבין $\binom{|A|}{k}$ האפשרויות לת"ק מגודל k בדיוק של $A = S_i$. לכל $j \in T_i$ (נשים לב שזהות $T_i = \{s \in A : f(s) = 1\}$ נקבעת כבר ע"י ההתניה שלנו על זהות S_i) נגדיר את המ"מ X_j להיות 1 אם j נבחר להיות ב־S_{i+1} ולהיות 0 אחרת. תחת הגדרות אלו מתקיים $|T_{i+1}| = \sum_{j\in T_i} X_j$ ולכן $\mathrm{E}\left[|T_{i+1}| \,\middle|\, S_i = A \wedge |S_{i+1}| = k\right] = \sum_{j\in T_i}\mathrm{E}[X_j] = |T_i|\cdot\frac{k}{|A|}$. לכן מתקיים $\mathrm{E}\left[|T_{i+1}|/|S_{i+1}| \,\middle|\, S_i = A\wedge |S_{i+1}|=k\right] = \frac{1}{k}\mathrm{E}\left[|T_{i+1}|\,\middle|\,S_i=A\wedge|S_{i+1}|=k\right] = |T_i|/|S_i|$ (השתמשנו בכך ש־$|S_{i+1}|$ שווה לערך הקבוע k תחת ההתניות).

מכיון שהשוויון על התוחלת המותנה נכון עבור כל התניה על $|S_{i+1}|$, מתקבל לפי נוסחת התוחלת השלמה $\mathrm{E}\left[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|\,\middle|\,S_i=A\right] = \sum_{k=1}^{|A|-1}\mathrm{E}\left[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|\,\middle|\,S_i=A\wedge|S_{i+1}|=k\right]\Pr[|S_{i+1}|=k] = |T_i|/|S_i|$. מכך נובע $\mathrm{E}[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|] = \sum_\alpha \mathrm{E}\left[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|\,\middle|\,|T_i|/|S_i|=\alpha\right]\Pr[|T_i|/|S_i|=\alpha] = \mathrm{E}[|T_i|/|S_i|]$, כאשר הסכום באמצע הוא על כל ה־α שעבורם $\Pr[|T_i|/|S_i|=\alpha] > 0$ (שזו תת־קבוצה סופית של קבוצת המספרים הרציונלים $\mathbb{Q}$).

לאחר שהוכחנו $\mathrm{E}[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|] = \mathrm{E}[|T_i|/|S_i|]$, טיעון אינדוקטיבי מעל i נותן בקלות את השוויון $\mathrm{E}[|T_i|/|S_i|] = \mathrm{E}[|T_0|/|S_0|]$. אבל זה עוד לא מסיים את ההוכחה, כי ה־i שבו התהליך נעצר אינו קבוע מראש.

על מנת להמשיך, "נרחיב" את התהליך כך שתמיד יסתיים ב־$i = |S_0|$. לכל $i < |S_0|$, אם הפונקציה $f|_{S_i}$ אינה קבועה אז נעשה בדיוק את מה שעשינו לפי התהליך המקורי. אם הפונקציה היא כבר קבועה, אז במקום לעצור מיידית, נקבע בפשטות $S_{i+1} = S_i$ (בהסתברות 1). נשים לב ש־$f|_{S_{|S_0|}}$ היא בהכרח פונקציה קבועה, כי בכל שלב i שבו הפונקציה אינה קבועה בהכרח יתקיים $|S_{i+1}| < |S_i|$, ולא יתכן שהגודל של S_i יתאפס. בשלב האחרון נפלוט את הערך הקבוע של f (שזה אותו ערך שבאלגוריתם המקורי היינו פולטים קודם לכן).

הדבר הבא לשים לב הוא שגם בתהליך החדש מתקיים $\mathrm{E}[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|] = \mathrm{E}[|T_i|/|S_i|]$ לכל $i < |S_0|$. לשם כך מפצלים למקרים. את המקרה שבו $f|_{S_i}$ אינה קבועה כבר ניתחנו קודם, והמקרה שבו זאת פונקציה קבועה (ואז $S_{i+1} = S_i$) הוא מיידי (כי אז מתקיים $|T_{i+1}|/|S_{i+1}| = |T_i|/|S_i|$ גם בלי לקיחת תוחלת). בסוף מתקיים $|T_{|S_0|}|/|S_{|S_0|}| \in \{0,1\}$ (כי f קבועה על $S_{|S_0|}$, וזה גם יהיה הפלט הסופי של האלגוריתם), ומאינדוקציה מתקיים $\mathrm{E}\left[|T_{|S_0|}|/|S_{|S_0|}|\right] = \mathrm{E}[|T_0|/|S_0|]$, ומכאן שהסיכוי שהערך הנ"ל יהיה שווה ל־1 הוא בדיוק $|T_0|/|S_0|$.

רגע לפני

לשם המחשה התשובה כאן היא פורמלית לחלוטין (יותר פורמלית ממה שמספיק בשבילכם לקבל ניקוד מלא). אם מתקיים $|S_0| = 1$ אז בהסתברות 1 קיים k כנדרש, ולכן נניח מעתה שמתקיים $|S_0| > 1$. ההסתברות שלא קיים k שעבורו $|S_k| \le 1$ היא 0 (ליתר דיוק, לכל k התוחלת של $|S_k|$ היא $|S_0|p^k$ וזו שואפת ל־0 עם k, ולכן בהסתברות 1 יהיה k שעבורו $S_k = \emptyset$). זה אומר שההסתברות שלא קיים k שעבורו $|S_k| = 1$ זהה להסתברות שקיימים $k \in \mathbb{N}$ ו־$j \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ שעבורם $|S_{k-1}| = j$ וגם $S_k = \emptyset$, כי האופציה הנותרת היא מאורע בהסתברות 0.

כל אלו הם מאורעות זרים זה לזה, ולכן ההסתברות שלא קיים אף ערך של k שעבורו $|S_k| = 1$ זהה לסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \Pr[(S_k=\emptyset)\wedge(|S_{k-1}|=j)] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\Pr[(S_k=\emptyset)\wedge(|S_k|\le1)\wedge(|S_{k-1}|=j)]$, וזה שווה ל־$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \Pr\left[(S_k=\emptyset)\,\middle|\,(|S_k|\le 1)\wedge(|S_{k-1}|=j)\right]\Pr[(|S_k|\le1)\wedge(|S_{k-1}|=j)]$. עתה

נשים לב שהמאורעות $(|S_k| \leq 1) \wedge (|S_{k-1}| = j)$ גם זרים זה לזה ולכן סכום ההסתברויות שלהם מקיים $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\Pr[(|S_k| \leq 1) \wedge (|S_{k-1}| = j)] \leq 1$. כל שנותר הוא לחסום לכל k ו־j את ההסתברות המותנה $\Pr\left[(S_k = \emptyset) \mid (|S_k| \leq 1) \wedge (|S_{k-1}| = j)\right]$.

לשם החסם, ראשית נחשב באופן ישיר את ההסתברות $\Pr[(S_k = \emptyset) \mid (|S_{k-1}| = j)] = (1-p)^j$ ואת ההסתברות $\Pr\left[(|S_k| = 1) \mid (|S_{k-1}| = j)\right] = jp(1-p)^{j-1}$. משני אלו ניתן עתה להסיק את החסם $\Pr\left[(S_k = \emptyset) \mid (|S_k| \leq 1) \wedge (|S_{k-1}| = j)\right] = (1-p)^j/((1-p)^j + jp(1-p)^{j-1}) = \frac{1-p}{1+(j-1)p} \leq \frac{1-p}{1+p}$.

לכן הסיכוי לאי קיום k שעבורו $|S_k| = 1$ חסום ע"י $\frac{1-p}{1+p}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\Pr[(|S_k| \leq 1) \wedge (|S_{k-1}| = j)] \leq \frac{1-p}{1+p}$. בהתאמה, הסיכוי שכן קיים k כזה הוא לפחות $1 - \frac{1-p}{1+p} = \frac{2p}{1+p}$.

שיפודים

ראשית נראה שיקול הסתברותי (שמשתמש בהגרלה עם תיקונים) שמוכיח שיש קבוצה U המקיימת את הנדרש, ואחר כך נראה איך ניתן לבצע לו דה־רנדומיזציה בשיטת התוחלות המותנות. אנחנו נגריל קבוצה U_1 באופן הבא: כל צומת $v \in V$ (באופן ב"ת בצמתים האחרים) יוכנס ל־U_1 בהסתברות $\frac{\ln(k)}{k}$ בדיוק. נגדיר מ"מ Y_1 שיהיה שווה לגודל של U_1, ונגדיר מ"מ Y_2 שיהיה שווה למספר הקשתות של ההיפרגרף שאינן מכילות צומת מ־U_1. על מנת להגדיר את U, נוסיף ל־U_1 צומת שרירותי מכל קשת שאינה מכילה צומת מ־U_1, ואז נקבל קבוצה כך שכל קשת מכילה צומת ממנה ומקיימת $|U| \leq Y_1 + Y_2$ (זה לא בהכרח שוויון כי יכול להיות שבשלב האחרון היו צמתים שהוספנו "מספר פעמים" עבור מספר קשתות של ההיפרגרף).

עתה נחסום את התוחלות של המ"מ, לפי לינאריות התוחלת. מתקיים $\mathrm{E}[Y_1] = n\frac{\ln(k)}{k}$ (לפי כך שלכל צומת $v \in V$ מגדירים משתנה אינדיקטור עבור המאורע שהוא נכנס ל־U_1, והתוחלת של מ"מ זה היא $\frac{\ln(k)}{k}$). כמו כן, לכל קשת של היפרגרף, הסיכוי שהיא אינה מכילה צמתים מ־U_1 הוא $(1 - \frac{\ln(k)}{k})^k < e^{k\ln(k)/k} = \frac{1}{k}$, ולכן מתקיים $\mathrm{E}[Y_2] = \frac{m}{k}$. על כן $\mathrm{E}[Y_1 + Y_2] < (n\ln k + m)/k$, ומכאן שיש בחירה ספציפית של U_1 שעבורה מתקבל U שזהו חסם עליון על הגודל שלו.

עתה נראה איך אפשר למצוא באופן דטרמיניסטי (בזמן פולינומי ב־n ו־m) קבוצה U_1 שעבורה מתקיים $Y \leq \mathrm{E}[Y]$ עבור $Y = Y_1 + Y_2$, מה שנותן לנו מיידית אלגוריתם דטרמיניסטי למציאת קבוצה U כנדרש. לשם כך עבור כל $i \in V = \{1, \ldots, n\}$ נגדיר מ"מ אינדיקטור X_i עבור המאורע $i \in U_1$. התוחלת המותנה של Y בהינתן $X_1 = b_1, \ldots, X_i = b_i$ (לכל $0 \leq i \leq n$ וסדרה $(b_1, \ldots, b_i$) גם ניתנת לחישוב בזמן פולינומי לפי לינאריות התוחלת. עבור Y_1 פשוט מתקיים $\mathrm{E}[Y_1 | X_1 = b_1, \ldots, X_i = b_i] = \sum_{j=1}^{i} b_j + (n-i)\frac{\ln(k)}{k}$, ועבור Y_2, נשים לב שאם $F \subset \{1, \ldots, n\}$ היא קשת של ההיפרגרף, אז אם קיים $j \in F \cap \{1, \ldots, i\}$ שעבורו $X_j = 1$ אז ההסתברות שקשת זו תתרום ל־Y_2 היא אפס, ואם לא קיים j כזה אז ההסתברות היא $(1 - \frac{\ln(k)}{k})^{|F \setminus \{1,\ldots,i\}|}$, שגם ניתנת לחישוב יעיל. על כן ניתן לחשב ביעילות גם את $\mathrm{E}[Y_2 | X_1 = b_1, \ldots, X_i = b_i]$, מה שמאפשר לנו להשתמש בשיטת התוחלות המותנות על מנת למצוא את U_1.

פתרונות לתרגיל השלישי

קרובים למטרה

נסמן מ"מ $X=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot a_i$ (שתלוי בהגרלה של $b_1,\ldots,b_n$). אנחנו נרצה לתת חסם תחתון גדול מאפס עבור המאורע $|X|\le 1$, אבל אי אפשר לעשות את זה ע"י שימוש ישיר באי־שוויון צ'בישף (או משפט ריכוז אחר), כי מתקיים $\mathrm{V}[X]=\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2=1$. בלי הגבלת הכלליות, נניח שמתקיים $a_n=\max\{a_1,\ldots,a_n\}$, ונחלק למקרים לפי גודל a_n. נשים לב שתמיד מתקיים $a_n\le 1$.

מקרה ראשון: $a_n\ge\frac{1}{2}$. במקרה זה נסמן מ"מ של הסכום ללא האיבר האחרון $Y=\sum_{i=1}^{n-1}b_i\cdot a_i$. מתקיים אז $\mathrm{V}[Y]=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i)^2\le\frac{3}{4}$ (וגם $\mathrm{E}[Y]=0$), ולכן לפי אי־שוויון צ'בישף מתקיים $|Y|\le\frac{3}{2}$ בהסתברות לפחות $1-\frac{3/4}{(3/2)^2}=\frac{2}{3}$. נגדיר B לפי $B=1$ אם $Y\ge 0$ ו־$B=-1$ אם $Y<0$. נשים לב שאם מתקיים גם $|Y|\le\frac{3}{2}$ וגם $b_n=-B$ אז מתקיים $|X|=|Y+b_n\cdot a_n|=\big||Y|-a_n\big|\le 1$. זאת מכיוון שאם $|Y|\le 1$ אז מתקיים $\big||Y|-a_n\big|\le\max\{|Y|,a_n\}\le 1$, ואם $1<|Y|\le\frac{3}{2}$ אז מתקיים $\big||Y|-a_n\big|=|Y|-a_n\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$.

על מנת לסיים במקרה הזה, נשים לב שמכיוון ש־b_n מוגרל באופן ב"ת ב־$b_1,\ldots,b_{n-1}$, הוא יהיה ב"ת בערך של Y (שתלוי רק ב־$b_1,\ldots,b_{n-1}$) ובפרט גם ב־B. על כן, בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ יתקיים גם $|Y|\le\frac{3}{2}$ וגם $b_n=-B$, ובפרט יתקיים אז $|X|\le 1$.

מקרה שני: $a_n<\frac{1}{2}$, ואז גם $a_i<\frac{1}{2}$ לכל $1\le i\le n$. נסמן ב־j את האינדכס המינימלי שעבורו $\sum_{i=1}^{j}(a_i)^2\ge\frac{3}{8}$. מכיוון שמתקיים $\sum_{i=1}^{j-1}(a_i)^2<\frac{3}{8}$, מ־$a_i<\frac{1}{2}$ נובע מכך $\sum_{i=1}^{j}(a_i)^2<\frac{5}{8}$. כמו כן מתקיים $\sum_{i=j+1}^{n}(a_i)^2\le 1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$. נגדיר עתה שני מ"מ, $Y=\sum_{i=1}^{j}b_i\cdot a_i$ ו־$Z=\sum_{i=j+1}^{n}b_i\cdot a_i$, כך שמתקיים $X=Y+Z$. כמו כן נגדיר $B=1$ אם $Y\ge 0$ ו־$B=-1$ אם $Y<0$, וכן $C=1$ אם $Z\ge 0$ ו־$C=-1$ אם $Z<0$. הדבר לשים לב הוא ש־Y (ו־B התלוי רק בו) הוא ב"ת ב־Z (ו־C התלוי רק בו), כי $b_1,\ldots,b_j$ נבחרים באופן ב"ת לחלוטין ב־$b_{j+1},\ldots,b_n$.

עתה נשתמש באי־שוויון צ'בישף עם $\mathrm{V}[Y]\le\frac{5}{8}$ ו־$\mathrm{E}[Y]=0$ על מנת להסיק שמתקיים $|Y|\le 1$ בהסתברות לפחות $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$, ובאופן דומה נסיק שמתקיים $|Z|\le 1$ בהסתברות לפחות $\frac{3}{8}$. המאורעות האלו הם ב"ת, ולכן שניהם מתקיימים בהסתברות לפחות $\frac{9}{64}$. במידה ושני המאורעות מתקיימים, אם $|Y|=0$ ו/או $|Z|=0$ אז בטוח יתקיים $|X|=|Y+Z|\le 1$. במידה ושני אלו שונים מאפס, נשים לב שהמאורע $B=-C$ מתקיים בהסתברות בדיוק $\frac{1}{2}$, מכיוון שלכל $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\{-1,1\}$, ההסתברות עבור המאורע $b_1=\alpha_1,\ldots,b_n=\alpha_n$ שווה להסתברות עבור המאורע $b_1=\alpha_1,\ldots,b_j=\alpha_j,b_{j+1}=-\alpha_{j+1},\ldots,b_n=-\alpha_n$ (שני המאורעות קורים בהסתברות 2^{-n} בדיוק). כמו כן, כאשר $B=-C$ וגם $|Y|,|Z|\le 1$, מתקיים $|X|\le\max\{|Y|,|Z|\}\le 1$.

בסה"כ, במקרה השני יש לנו חסם תחתון של לפחות $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{64}=\frac{9}{128}$ על ההסתברות עבור $|X|\le 1$. יחד עם המקרה הראשון, כיסינו את כל המקרים האפשריים עבור $a_1,\ldots,a_n$ המקיימים את תנאי השאלה.

לפספס את הרכבת

נשים לב שאפשר לתת הגדרה אלטרנטיבית למרחב ההסתברות מעל ערכי הסדרה $X_0,X_1,\ldots$ באופן הבא: נגריל סדרה של מ"מ ב"ת (לחלוטין) $Z_1,Z_2,\ldots$, כאשר כל Z_i יקבל את הערך 1 בהסתברות $\frac{1}{3}$ ויקבל את הערך 0 בהסתברות $\frac{2}{3}$, ולכל $i\ge 0$ נגדיר $X_i=-i+2\sum_{j=1}^{i}Z_j$. בצורה זו נקבל בדיוק את אותה ההתפלגות על המ"מ $X_0,X_1,\ldots$ כמקודם.

עתה לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר את המאורע A_k, שאומר שקיים i שעבורו $X_i=k$. בפרט A_1 הוא המאורע "A" מהפתרון הרשמי של "לתפוס את הרכבת", שזה המאורע שאת ההסתברות שלו אנחנו צריכים לחסום כאן. לפני שנמשיך, נשים לב שעל מנת לפתור את השאלה מספיק להראות שקיים k שעבורו $\Pr[A_k]<1$. יש שתי דרכים להצדיק את זה: האפשרות הראשונה היא להוכיח (בדומה למה שנעשה עם המאורע B בפתרון הרשמי של "לתפוס את הרכבת", בתוספת אינדוקציה) שלכל k מתקיים $\Pr[A_k]=(\Pr[A])^k$. האפשרות השניה היא לשים לב שמתקיים $\Pr[\neg A]\ge\Pr[\neg A\wedge(X_k=-k)]=\Pr[\neg A|X_k=-k]\Pr[X_k=-k]$. מכאן משתמשים

בתובנה המרכזית של הפתרון של "לתפוס את הרכבת" ומסיקים שמתקיים $\Pr[\neg A|X_k=-k]=\Pr[\neg A_k]$, בעוד שמתקיים $\Pr[X_k=-k]=(\frac{2}{3})^k>0$.

עתה נכתוב הוכחה, שעבור k גדול מספיק (שנבחר בסוף) תתן לנו שאכן מתקיים $\Pr[A_k]<1$. נגדיר מאורעות C_i עבור $i\in\mathbb{N}$, כאשר C_i הוא המאורע שמתקיים $X_i\geq k$, שהוא שקול למאורע $\sum_{j=1}^{i}Z_j\geq\frac{k}{2}+\frac{i}{2}$. בפרט מתקיים $A_k=\bigvee_{i\in\mathbb{N}}C_i$ ולכן $\Pr[A_k]\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}\Pr[C_i]$. עתה נותר לחסום את המחוברים בצד ימין.

עבור $i<k$, מתקיים בפשטות $\Pr[C_i]=0$. עבור $i\geq k$, לפי חסימת סטיות גדולות (החסם השני מהשיעור) מתקיים $\Pr[\sum_{j=1}^{i}Z_j\geq\frac{k}{2}+\frac{i}{2}]\leq\Pr[\sum_{j=1}^{i}Z_j\geq\frac{i}{2}]\leq e^{-i/18}$. כל שנותר הוא לבחור k שעבורו מתקיים $\sum_{i=k}^{\infty}e^{-i/18}<1$. קיים לנו k כזה כי הטור $\sum_{i=0}^{\infty}e^{-i/18}$ הוא טור חזקות מתכנס. עבור ה־k שבחרנו נקבל $\Pr[A_k]\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}\Pr[C_i]\leq\sum_{i=k}^{\infty}e^{-i/18}<1$, כנדרש.

גרפים משתרגים

אם מסמנים את המאורעות המתאימים, פתרון השאלה (ע"י שימוש בקורלציות) נראה ברור. מרחב ההסתברות שלנו הוא בעצם בחירה יוניפורמית של ת"ק F של קבוצת הקשתות E, אשר תהווה את קבוצת הקשתות של G_1, בעוד שהמשלימה שלה $E\setminus F$ תהיה קבוצת הקשתות של G_2. נסמן ב־A את המאורע ש־G_1 קשיר, וב־B את המאורע ש־G_2 קשיר. נשים לב שמאורעות אלו ניתנים לתיאור כמשפחות של קבוצות מתוך $\mathcal{P}(E)$: המאורע A מתאים למשפחה מונוטונית לא־יורדת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(E)$, והמאורע B מתאים למשפחה מונוטונית לא־עולה $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(E)$. בקשר ל־$\mathcal{B}$, נשים לב שזו משפחת תתי־הקבוצה של E כך שתתי הקבוצה המשלימים שלהם מקיימים את תכונת הקשירות. זה אומר שאם $F\in\mathcal{B}$ ו־$F'\subseteq F$, אז גם $F'\in\mathcal{B}$ (בגלל שמתקיים $E\setminus F\subseteq E\setminus F'$).

לבסוף, נשים לב שמתקיים $\Pr[A]=\Pr[B]$, כי בבחירה יוניפורמית של תת־קבוצה $F\subseteq E$, גם המשלימה $E\setminus F$ מתפלגת יוניפורמית. שתי ההתפלגויות האלו שוות (לפי הגדרה במקרה של A) להסתברות ש־G_1 יהיה קשיר. כמו כן, לפי הגדרה $\Pr[A\wedge B]$ היא ההסתברות ששני הגרפים שלנו קשירים. על מנת לסיים, נשים לב שלפי משפט קלייטמן מתקיים $\Pr[A\wedge B]\leq\Pr[A]\cdot\Pr[B]=(\Pr[A])^2$.

רעש רקע

עבור אי השוויון הראשון, נשים לב שמספיק להוכיח שלכל β שעבורו $\Pr[Z=\beta]>0$ מתקיים אי השוויון $\mathrm{H}[X+Y|Z=\beta]\geq\mathrm{H}[Y|Z=\beta]$. נשים לב שגם בהתניה של מרחב ההסתברות על $Z=\beta$ מתקיים ש־X הוא ב"ת ב־Y (כי X היה ב"ת בצירוף של Y ו־Z). על כן, מספיק להראות שלכל זוג משתנים ב"ת X',Y' מתקיים $\mathrm{H}[X'+Y']\geq\mathrm{H}[Y']$ (אצלנו אלו יהיו ההתניות של X ו־Y על $Z=\beta$).

לשם כך, נשים לב שמתקיים $\mathrm{H}[X',Y']=\mathrm{H}[X']+\mathrm{H}[Y']$ כי אלו מ"מ ב"ת, וכן $\mathrm{H}[X',Y']=\mathrm{H}[X',X'+Y']$, וזאת מכיוון שהפונקציה $f(a,b)=(a,a+b)$ היא הפיכה (לפי הפונקציה $f^{-1}(a,b)=(a,b-a)$). על מנת להבין את השוויון עבור פונקציות חח"ע של מ"מ אפשר או להיזכר בהגדרה המקורית של אנטרופיה (שלא תלויה בערכים של המ"מ עצמם אלא רק בהסתברות לכל ערך), או להשתמש באי השוויון מהשיעור עבור פונקציות של מ"מ לקבלת $\mathrm{H}[X',Y']\leq\mathrm{H}[f(X',Y')]=\mathrm{H}[X',X'+Y']$ מצד אחד ו־$\mathrm{H}[X',X'+Y']\leq\mathrm{H}[f^{-1}(X',X'+Y')]=\mathrm{H}[X',Y']$ מצד שני.

מהשוויונים הנ"ל מתקיים $\mathrm{H}[X']+\mathrm{H}[Y']=\mathrm{H}[X',X'+Y']\leq\mathrm{H}[X']+\mathrm{H}[X'+Y']$ לפי תת־חיבוריות של שרשור מ"מ, ומהעברת אגפים מקבלים $\mathrm{H}[X'+Y']\geq\mathrm{H}[Y']$.

עבור אי־השוויון השני נשים לב שלכל α שעבורו $\Pr[X=\alpha]>0$ מתקיים $\mathrm{H}[Y|Z,X=\alpha]=\mathrm{H}[Y|Z]$, בגלל אי־התלות של X בצירוף של Y ו־Z. על כן $\mathrm{H}[Y|Z]=\mathrm{E}_{\alpha\sim X}\mathrm{H}[Y|Z,X=\alpha]=\mathrm{H}[Y|Z,X]$. כמו כן מתקיים השוויון $\mathrm{H}[Z,X]=\mathrm{H}[Z,X+Z]$ (שוב לפי כך ש־$f(a,b)=(a,a+b)$ היא חח"ע), וגם $\mathrm{H}[Y,Z,X]=\mathrm{H}[Y,Z,X+Z]$ (גם לפי פונקציה חח"ע), ומאלו לפי כלל השרשרת של אנטרופיה מותנית נקבל $\mathrm{H}[Y|Z,X]=\mathrm{H}[Y,Z,X]-\mathrm{H}[Z,X]=\mathrm{H}[Y,Z,Z+X]-\mathrm{H}[Z,Z+X]=\mathrm{H}[Y|Z,Z+X]$.

מכל אלו קיבלנו סה"כ $\mathrm{H}[Y|Z]=\mathrm{H}[Y|Z,Z+X]$. לבסוף, לפי אי־השוויון מהשיעור על התניות על שרשורים של מ"מ, נקבל $\mathrm{H}[Y|Z,Z+X]\leq\mathrm{H}[Y|Z+X]$, להשלמת ההוכחה.