תרגיל ראשון   הגשה: 22.2.2024

הערה: אנחנו נשתמש בתרגיל הזה (וגם בהמשך הקורס), עבור קבוצה A, בסימון $\mathcal{P}(A)$ עבור קבוצת החזקה של A (ז"א קבוצת כל תתי־הקבוצה של A).

הכל על הכל (6 נקודות)

בהינתן משפחה $\mathcal{F}$ של תתי־קבוצה של $\{1,\ldots,n\}$ ובהינתן תת־קבוצה נוספת $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$, נגדיר את ההטלה של $\mathcal{F}$ על A כמשפחת תתי־הקבוצה של A המתקבלת מהחיתוכים שלה עם אברי $\mathcal{F}$, ז"א $\mathcal{F}|_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$. הראו שקיים קבוע גלובלי C כך שלכל n ו־k קיימת משפחה $\mathcal{F}_{k,n}$ של לכל היותר $C \cdot k2^k \log n$ תתי־קבוצה של $\{1,\ldots,n\}$, כך שלכל קבוצה $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$ מגודל k בדיוק ההטלה $\mathcal{F}_{k,n}|_A$ מכילה את כל תתי קבוצה האפשריים של A, ז"א $\mathcal{F}_{k,n}|_A = \mathcal{P}(A)$.

קואליציה רחבה (9 נקודות)

נתונים קבוצה S, מרחב הסתברות μ מעל S, ופונקצית "ערך" $f : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (אין הגבלות על f). נתון גם שעבור כל קבוצה $A \subset S$ מגודל m או פחות, אם מגרילים את $a \in S$ לפי μ, אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ קיימת קבוצה $B \subseteq A \cup \{a\}$ שעבורה מתקיים $f(B) > f(A)$. הראו שאם $X_1, \ldots, X_{10m}$ כולם מוגרלים באופן ב"ת לחלוטין מתוך S לפי μ, אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ קיימת קבוצה $I \subseteq \{1,\ldots,10m\}$ מגודל גדול ממש מ־m שעבורה $f(\{X_i : i \in I\}) > 0$.

רמז ואזהרה: כדאי להגדיר "מאורע גרוע" לכל $I \subset \{1,\ldots,10m\}$ שעבורו $|I| \le m$, ולהראות שבהסתברות גבוהה מספיק אף אחד מהמאורעות הנ"ל לא מתקיים. האזהרה היא שכדאי להיזהר בפורמליזם, זה לא קשה לכתוב תשובה שרק נראית נכונה במבט ראשון.

דין פרוטה כדין מאה (3 נקודות)

עבור פרמוטציה (פונקציה חח"ע ועל) $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ ועבור איבר $i \in \{1,\ldots,n\}$, נגיד שההיקף של i הוא ה־k הקטן ביותר כך ש־k הפעלות רציפות של σ יעבירו את i לעצמו (עבור אלו שמכירים את המשפט ש־σ ניתנת לפירוק לעגילים זרים, זהו גודל העגיל הכולל את i). הראו שכאשר בוחרים את σ באופן מקרי ויוניפורמי מבין $n!$ האפשרויות, התפלגות ההיקף של $1 \in \{1,\ldots,n\}$ היא יוניפורמית מעל $\{1,\ldots,n\}$ (בפרט, הדבר אומר שבהסתברות $\frac{1}{n}$ הפרמוטציה σ מורכבת מעגיל אחד על כל הקבוצה).

הלינאריות הלא־נכונה (3 נקודות)

תנו דוגמה למרחב הסתברות המקיים את הדברים הבאים עבור המשתנים המקריים Y ו־$X_1, X_2, \ldots$ (סדרה אין־סופית בת מניה של משתנים):

- המשתנה Y מתפלג מעל המספרים הטבעיים, התוחלת שלו סופית, אבל הוא יכול לקבל כל מספר טבעי בהסתברות גדולה מ־0.
- המשתנים X_i כולם ב"ת ומתפלגים מעל $\{0,1\}$.
- אם נגדיר את המ"מ $Z = \sum_{j=1}^{Y} X_j$, **לא קיים** שום מספר טבעי k שעבורו מתקיימת המשוואה $\mathrm{E}[Z|Y=k] = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{E}[X_j]$.

הערה: הרבה סטודנטים בשנים הקודמות ניסו לפתור תרגיל תוך כדי הסתמכות על ה"שוויון" שבסעיף השלישי. מטרת התרגיל היא להראות שהוא אינו מובטח (השוויון $\mathrm{E}[Z|Y=k] = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{E}[X_j|Y=k]$ ש"דומה" לשוויון הנ"ל כן מתקיים, כמקרה פרטי של לינאריות התוחלת במרחב ההסתברות המותנה המתאים).

תרגיל שני   הגשה: 28.3.2024

איזונים ובלמים (9 נקודות)

עבור קבוצה סופית לא ריקה S_0 ופונקציה $f : S_0 \to \{0,1\}$ נבצע את התהליך הבא: בשלב ה־i (כאשר מתחילים מ־$i = 0$), אם יש ל־$f|_{S_i}$ רק ערכי 0 אז נפלוט "0", אם יש ל־$f|_{S_i}$ רק ערכי 1 אז נפלוט "1", ובכל מקרה אחר נבחר קבוצה S_{i+1} באופן יוניפורמי מבין כל תתי־הקבוצה של S_i למעט $\emptyset$ ו־S_i עצמה, ונמשיך לשלב הבא. הראו שההסתברות לקבל פלט "1" בסוף התהליך היא בדיוק $|T_0|/|S_0|$, כאשר T_0 היא הקבוצה $\{s \in S_0 : f(s) = 1\}$ (במילים אחרות, ההסתברות לקבל "1" בסוף התהליך שווה לכמות היחסית של ערכי ה־1 בפונקציה f).

הדרכה: לכל i שבו האלגוריתם מתבצע, נסמן ב־T_i את הקבוצה $\{s \in S_i : f(s) = 1\}$. ראשית דבר הוכיחו שמתקיים $\mathrm{E}[|T_{i+1}|/|S_{i+1}|] = \mathrm{E}[|T_i|/|S_i|]$. לאלו מכם שהולכים לפי ההדרכה, הוכחת טענת העזר הנ"ל שווה 6 נקודות.

רגע לפני (6 נקודות)

עבור קבוצה סופית לא ריקה S_0 ומספר ממשי $0 < p < 1$ נבצע את התהליך הבא: בשלב ה־i (כאשר מתחילים מ־$i = 0$), בוחרים את S_{i+1} ע"י כך שכל איבר $a \in S_i$ יבחר להיות ב־S_{i+1} בהסתברות p, באופן ב"ת בכל הבחירות האחרות. הראו שבהסתברות לפחות $\frac{2p}{1+p}$ קיים k שעבורו $|S_k| = 1$.

רמז: השאלה נראית דומה לשאלה הקודמת, אבל הניתוח יותר דומה לשאלות מסוג "דו־קרב תרנגולים" (מחוברת התרגילים הפתורים) מאשר לזה של השאלה הקודמת.

שיפודים (6 נקודות)

הראו שלכל היפרגרף k־יוניפורמי מעל קבוצת הצמתים $V = \{1, \ldots, n\}$ (כזכור כל קשת של היפרגרף כזה היא תת־קבוצה של V מגודל k בדיוק) שיש לו m קשתות ניתן למצוא קבוצה $U \subset V$ בת לכל היותר $(n \ln k + m)/k$ צמתים (שימו לב ללוגריתם בבסיס טבעי בביטוי), כך שכל קשת של ההיפרגרף תכיל לפחות צומת אחד מ־U. עליכם להסביר גם כיצד למצוא קבוצה כזו באמצעות אלגוריתם **דטרמיניסטי** עם זמן ריצה פולינומי ב־n ו־m.

תרגיל שלישי   הגשה: 23.5.2024

קרובים למטרה (9 נקודות)

נתונים $a_1,\ldots,a_n$, כולם מספרים ממשיים בין 0 ו־1, שמתקיים עבורם $\sum_{i=1}^n (a_i)^2 = 1$. הראו שקיים קבוע $\alpha > 0$ שאינו תלוי ב־n או בערכי a_i, כך שאם מגרילים את $b_1,\ldots,b_n \in \{-1,1\}$ באופן יוניפורמי וב"ת, אז בהסתברות לפחות α מתקיים $|\sum_{i=1}^n b_i \cdot a_i| \le 1$.

רמז: זה עוזר לפצל למקרים לפי מהו ערך ה־a_i המקסימלי.

הערה: אפשר להשתמש בטענת השאלה על מנת להוכיח את הטענה הגיאומטרית הבאה: לכל על־מישור שעובר דרך הראשית ב־$\mathbb{R}^n$ (על־מישור כזה הוא קבוצת נקודות המאופיינת כקבוצת הפתרונות של משוואה לינארית בודדת), לפחות $\alpha 2^n$ מנקודות הקבוצה $\{-1,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$ הם במרחק שאינו עולה על 1 מעל־המישור. אתם מוזמנים לחשוב איך עושים את זה.

לפספס את הרכבת (9 נקודות)

כזכור, בשאלה "לתפוס את הרכבת" מחוברת התרגילים שהוצגה לכם בתרגול, היה נתון לכם שההסתברות שיהיה i שעבורו $X_i = 1$ קטנה ממש מ־1. עתה עליכם להוכיח את הטענה הזו.

הערה: מותר לכם להשתמש בסימונים של השאלה שהוצגה לכם, וכן של הפתרון הרשמי שלה. עם זאת עליכם לזכור שההוכחה שם מסתמכת על התוצאה שאתם צריכים להוכיח כאן, אז צריך להזהר מטיעונים מעגליים.

גרפים משתרגים (6 נקודות)

נתון גרף (פשוט, לא מכוון וסופי) כל שהוא G עם קבוצת צמתים V וקבוצת קשתות E. נגריל שני גרפים $G_1(V,E_1)$ ו־$G_2(V,E_2)$, מעל אותה קבוצת צמתים, באופן הבא: לכל קשת $e \in E$ של G, בהסתברות $\frac{1}{2}$ נכניס אותה ל־E_1, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נכניס אותה ל־E_2 (היא תמיד תוכנס לבדיוק אחת מהקבוצות הנ"ל). הבחירה הזו נעשית באופן ב"ת לחלוטין לכל $e \in E$.

הראו שההסתברות שגם G_1 וגם G_2 הם גרפים קשירים היא לכל היותר ריבוע ההסתברות ש־G_1 קשיר.

רעש רקע (6 נקודות)

נתונים שלושה מ"מ בדידים X,Y,Z מעל מרחב הסתברות כל שהוא, שמקבלים ערכים ב־$\mathbb{R}$. נתון ש־X הוא ב"ת בצירוף של Y ו־Z (לא רק בכל אחד מהם לחוד). לא נתון האם Y ו־Z הם ב"ת זה בזה או לא. הראו שמתקיים $\mathrm{H}[Y|X+Z] \ge \mathrm{H}[Y|Z]$ וכן $\mathrm{H}[X+Y|Z] \ge \mathrm{H}[Y|Z]$. שימו לב שאלו פעולות חיבור של מספרים ממשיים ולא פעולות שרשור משתנים.

הערה: לא קשה למצוא דוגמאות שבהן אי־השוויונים האלו אינם מתקיימים אם מרשים ל־X להיות תלוי במשתנים האחרים.