תרגיל ראשון הגשה: 24.11.2022

לכו בעקבות החץ (6 נקודות)

נתון גרף מכוון G עם קבוצת צמתים V וקבוצת קשתות E. כזכור, בגרף מכוון כל קשת היא זוג סדור של צמתים, עם צומת "יציאה" וצומת "כניסה". נגדיר שתי התפלגויות מעל V:

- בהתפלגות τ, הצומת $v \in V$ יבחר בהסתברות $d_i(v)/|E|$, כאשר $d_i(v)$ הוא מספר הקשתות הנכנסות ל־v.
- בהתפלגות ν, הצומת $v \in V$ יבחר בהסתברות $d(v)/2|E|$, כאשר $d(v)$ הוא מספר הקשתות שמכילות את v (יוצאות או נכנסות).

הראו שמתקיים $d(\nu, \tau) \leq \frac{1}{2}$.

הערה: יש פתרון אלגנטי לשאלה שלא דורש חישוב ישיר.

התבלבלות (6 נקודות)

נתונות שתי התפלגויות μ_1 ו־μ_2 מעל $S = \{1, \ldots, n\}$. נגדיר התפלגות חדשה $\hat{\mu}$ עם שני משתנים מקריים X, Y באופן הבא: בהסתברות $\frac{1}{2}$, הערכים המוגרלים של X ו־Y יהיו התוצאות של שתי הגרלות ב"ת לפי μ_1. בהסתברות $\frac{1}{2}$, הערכים המוגרלים של X ו־Y יהיו התוצאות של שתי הגרלות ב"ת לפי μ_2. שימו לב שההתפלגות $\hat{\mu}$ והמשתנים X, Y בעצם מוגדרים מעל הקבוצה $S \times S$. הראו שאם $\mu_1 \neq \mu_2$ אז המ"מ X, Y **אינם** בלתי־תלויים זה בזה.

לתפוס את הרכבת (9 נקודות)

נגדיר סידרה אינסופית של משתנים מקריים ומרחב הסתברות באופן הבא: המ"מ X_0 יוגדר כך שבהסתברות 1 מתקיים $X_0 = 0$. לכל $i > 0$, אחרי שהגרלנו וקבענו כבר את הערך של X_{i-1}, בהסתברות $\frac{1}{3}$ (באופן ב"ת בכל ההגרלות הקודמות) נקבע $X_i = X_{i-1} + 1$ ובהסתברות $\frac{2}{3}$ נקבע $X_i = X_{i-1} - 1$. חשבו את ההסתברות שיהיה i כל שהוא שעבורו $X_i = 1$. **נתון לכם שההסתברות הזו קטנה ממש מ־1.**

הדרכה: זה עוזר קודם להוכיח שהסיכוי שיהיה i כל שהוא שעבורו $X_i = 2$ הוא ריבוע הסיכוי שיהיה i כל שהוא שעבורו $X_i = 1$. חישבו, עבור i נתון, מהי ההסתברות המותנה לקיום $j > i$ שעבורו $X_j = 2$ בהינתן המאורע $X_i = 1$.

רמז אלטרנטיבי: פתרון אפשרי אחר לשאלה מתחיל בניתוח של ההסתברות שמתקיים $X_1 = -1$ (ז"א ש"התחלנו ברגל שמאל") ובכל־זאת קיים $i > 1$ שעבורו $X_i = 0$. הגעה מתי שהוא ל־$X_j = 1$ דורשת קודם כל ביצוע של אפס או יותר סבבים של "מעבר ל־-1 ואז חזרה לאפס".

הערה: מרחב ההסתברות המוגדר כאן (המרחב מעל כל הסדרות האפשריות של ערכי $(X_0, X_1, X_2, \ldots$ הוא בעצם רציף. אפשר אבל לפתור את השאלה בלי להתעמק בפורמליזם של מרחבי הסתברות רציפים (בפרט כל המאורעות המעורבים יהיו "לגיטימים").

תרגיל שני הגשה: 29.12.2022

לתפוס את המרובה (10 נקודות)

עבור מרחב התפלגות μ מעל $\mathbb{N}$, נגדיר מ"מ $X_1,\ldots,X_k$ שכולם ב"ת, וכל אחד מהם לחוד מתפלג לפי μ. נסמן ב־A את קבוצת הערכים המופיעים ב־$X_1,\ldots,X_k$ (קבוצה רגילה, לא מחשיבים כפילויות). הראו שקיים קבוע גלובלי C שעבורו אם מתקיים $k \geq Cn/\epsilon$ (לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $\epsilon > 0$), אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ מתקיים איחוד המאורעות "$\mu(A) \geq 1-\epsilon$" ו־"$|A| \geq n$" (הבהרה – "איחוד" פירושו שלפחות אחד משני המאורעות הנ"ל צריך להתקיים).

הערה לפורמליסטים: סדרת המשתנים $X_1,\ldots,X_k$, ויחד אתה המשתנים המקריים שערכם מוגדר להיות $\mu(A)$ ו־$|A|$ בהתאמה למעלה, יכולים להיות מוגדרים מעל מרחב התפלגות מתאים שקבוצת הבסיס שלו היא $\mathbb{N}^k$. המרחב הנ"ל (למרות שאינו סופי) הוא בדיד, ובפרט ההסתברויות לכל המאורעות נקבעות ע"י ההסתברויות לאיברים של קבוצת הבסיס. **עם זאת, בשאלה הזו (בעיקר עבור המשתמשים ברמז שמעביר אותנו למרחבים לא בדידים) לא נהיה קפדניים עד הסוף בנוגע לפורמליזם.**

אפשרות לניקוד חלקי: אפשר עבור 6 נקודות להראות את זה כאשר μ מוגדר מעל $\{1,\ldots,n\}$ (במקום $\mathbb{N}$).

רמז: כדאי (עבור השאלה המלאה) לחשוב על סידרה לא מוגבלת מראש $X_1,X_2,\ldots$ של מ"מ, ולנתח את ה־k הקטן ביותר שעבורו קבוצת הערכים של $X_1,\ldots,X_k$ מקיימת את הנדרש. עבור גרסת 6 הנקודות יש פתרון חלופי קל בהרבה. יש גם עוד פתרונות לשאלה המלאה, לא כולם מוגבלים לשיטות שנלמדו עד מועד שחרור השאלה.

רוקדים על שתי החתונות (10 נקודות)

הראו, עבור d ו־n גדולים מספיק, שלכל גרף (פשוט ולא מכוון) G בעל קבוצת צמתים V מגודל n ובעל דרגה מינימלית לפחות d, קיימת קבוצה $A \subset V$ מגודל $O(n\log(d)/d)$, כך שלכל צומת $v \in V \setminus A$ קיים לפחות שכן אחד ב־A ולפחות שכן אחד ב־$V \setminus A$.

הבהרה: עליכם להוכיח, עבור קבוע גלובלי C מתאים, את הקיום של קבוצה A שגודלה חסום ע"י $Cn\log(d)/d$ ומקיימת את תנאי השאלה בנוגע לצמתים ב־$V \setminus A$.

תרגיל שלישי הגשה: 26.1.2023

שוויון הנפש (8 נקודות)

הראו שלכל $2 > \alpha > 0$ הדבר הבא מתקיים לכל מספר טבעי n גדול מ־N_α מתאים, ולכל $k \le \alpha n/\log(n)$ (הלוגריתם הוא בבסיס 2): אם $A_1,\ldots,A_k$ הן תתי־קבוצות כל שהן של $\{1,\ldots,n\}$, אז קיימות שתי תתי־קבוצות $B_1,B_2 \subseteq \{1,\ldots,n\}$, שונות זו מזו, שעבורן מתקיים $|A_i \cap B_1| = |A_i \cap B_2|$ לכל $1 \le i \le k$.

רמז: לא צריך לנתח הגרלה במקביל של שתי תתי־קבוצות. ניתוח הסתברותי של האפשרויות עבור החיתוכים עם תת־קבוצה אחת יעזור.

צריכים לחסוך (12 נקודות)

נתונה פונקציה $f:\{0,1\}^n \to \{0,1,*\}$, כאשר ערך של $f(x)=*$ פירושו הוא "כל תשובה עבור x היא נכונה". נניח שיש אלגוריתם הסתברותי שקורא את הקלט $x \in \{0,1\}^n$ ב־q מקומות לכל היותר, ולכל x שעבורו $f(x) \in \{0,1\}$, בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ פולט את הערך הנכון עבור $f(x)$ (כאשר $f(x)=*$ אז מותר לאלגוריתם לפלוט כל ערך בכל הסתברות). הראו שיש אלגוריתם כזה (גם עם הסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ לתשובה נכונה כאשר $f(x) \in \{0,1\}$) שקורא את x ב־$3q$ מקומות לכל היותר, וכל ההסתברות שלו מבוססת על הטלה של $k=\log(n)+O(1)$ מטבעות לכל היותר – ז"א שהאלגוריתם החדש מקבל ערך $r \in \{0,1\}^k$ שמוגרל יוניפורמית מתוך 2^k האפשרויות, ובהסתמך עליו ועל מה שהוא קורא מהקלט x הוא פועל דטרמיניסטית.

הערה קטנה: הסיבה שמאפשרים ערכי "$*$" ב־f היא שיש מעט פונקציות "מעניינות" $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ שעבורם ידועים אלגוריתמים שנותנים תשובה נכונה בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ ללא קריאה של $\Omega(n)$ מקומות מהקלט (אין לכך השפעה מהותית על ההוכחה הנדרשת).

הבהרה גדולה: אין שום דרישות על סיבוכיות החישוב (או אפילו אם האלגוריתם ניתן לחישוב). מבחינתכם יכול להיות שפשוט יש לאלגוריתם החדש רשימה עצומה של אלגוריתמים דטרמיניסטים והוא בוחר להריץ אחד מתוכם לפי r.

תרגיל רביעי   הגשה: 2.3.2023

אי אפשר להתחמק (8 נקודות)

מגרילים קבוצה $U \subseteq \{1,\ldots,n\}$ ע"י כך שכל $1 \le i \le n$ נבחר להיות ב־U בהסתברות p (עבור קבוע $0 < p < 1$) באופן ב"ת בכל הבחירות האחרות. כמו כן נתון שיש אלגוריתם $\mathcal{A}$ שבוחר קבוצה $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$ באופן "אדפטיבי": בשלב ה־i האלגוריתם בוחר האם $i \in A$, והבחירה הזו יכולה להיות תלויה בזהות של $U \cap \{1,\ldots,i-1\}$. הראו שלכל $a > 0$ מתקיים $\Pr[|A \cap U| - p|A| > a] < e^{-a^2/2n}$, בלי קשר לאופן שבו האלגוריתם $\mathcal{A}$ מבצע את הבחירות שלו.

הערה: הגודל $|A|$ עצמו יכול להתפלג באופנים שלא מקיימים משפטי ריכוז. משפט הריכוז שאתם צריכים להוכיח הוא על הגודל של $|A \cap U|$ ביחס ל־$|A|$.

הבהרות: בבדיקה של תרגיל זה תהיה שימת לב לפרטים חסרים, נסו שלא יהיו כאלו. מותר להניח ש־$\mathcal{A}$ הוא דטרמיניסטי (בקשר להחלטה האם $i \in A$ בהינתן $U \cap \{1,\ldots,i-1\}$), אבל זה הדבר היחידי שמותר להניח על $\mathcal{A}$. המשמעות היא שאפשר להסתכל על $\mathcal{A}$ כעל סדרה של פונקציות $\mathcal{A}_i : \mathcal{P}(\{1,\ldots,i-1\}) \to \{0,1\}$ עבור $1 \le i \le n$, ובסוף מתקיים $A = \{i : \mathcal{A}_i(U \cap \{1,\ldots,i-1\}) = 1\}$.

לסחוט את הלימון (6 נקודות)

נתון ש־$X_0,\ldots,X_m$ הוא מרטינגל מעל מרחב הסתברות בדיד (כך שלא צריך להסתבך עם הגדרות של מרחבים רציפים) שעבורו $X_0 = 0$ (בהסתברות 1). כמו כן נתון שלכל $1 \le i \le m$ וסדרת ערכים $\alpha_0,\ldots,\alpha_{i-1}$ שמתקיים עבורם $\Pr[X_0 = \alpha_0,\ldots,X_{i-1} = \alpha_{i-1}] > 0$, קיים $p = p_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{i-1}} \in [0,1]$ שעבורו מתקיים $\Pr[X_{i-1} - p \le X_i \le X_{i-1} + 1 - p | X_0 = \alpha_0,\ldots,X_{i-1} = \alpha_{i-1}] = 1$. במילים אחרות, לכל "הסטוריה אפשרית" של המרטינגל לפני X_i, תחום הערכים האפשריים של X_i מוכל בקטע באורך 1 (שכמובן מכיל את הערך של X_{i-1}, כי אחרת זה לא יכול להיות מרטינגל). הראו שלכל $a > 0$ מתקיים $\Pr[X_m > a] < e^{-2a^2/m}$.

הסבר לשאלה: איננו דורשים הוכחה מלאה של משפט הריכוז המתאים. הסבירו על אילו הוכחות מחוברת הקורס אתם מסתמכים, אילו חלקים אתם מחליפים בהם, ואיך הדברים מסתדרים. כן צריך להוכיח את הטענות שמחליפות את הטענות המקוריות, אבל מותר להסתמך על כל דבר שמופיע בחוברת ההרצאות של הקורס גם אם הוא ניתן שם ללא הוכחה משלו.

הערה: הגרסה הזו מקבילה למשפט הריכוז על סכום משתנים ב"ת מוטים שנלמד בהרצאה (המשפט השני בפרק המתאים). גרסה זו מחזירה את המקדם בתוך החזקה ל"מקומו הראוי" כפי שמופיע באותו משפט ריכוז.

לא מכילים (6 נקודות)

נניח ש־$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \setminus \{\emptyset\}$ היא משפחה של תתי־קבוצה לא־ריקים של $\{1,\ldots,n\}$ שמתקיים עבורה $\sum_{F\in\mathcal{F}} 2^{-|F|} \le n/\log(n)$. הראו שקיימת קבוצה $B \subset \{1,\ldots,n\}$ שאינה מכילה אף איבר ב־$\mathcal{F}$ ומקיימת $|B| \ge (\frac{1}{2} - o(1))n$.

הבהרה: בכתיבה מפורשת (ללא שימוש ב־"o"), צריך להוכיח שלכל $\alpha < \frac{1}{2}$ קיים N_α, כך שאם $n > N_\alpha$ ו־$\mathcal{F}$ היא משפחה כמו בנוסח השאלה, אז קיימת B שאינה מכילה אף איבר ב־$\mathcal{F}$ ומקיימת $|B| \ge \alpha n$.

דומה בדומה (6 נקודות)

נתון ש־μ ו־ν הם שני מרחבי הסתברות מעל $S = \{1,\ldots,n\}$. הראו שההפרש בין האנטרופיות שלהם מקיים $|\mathrm{H}[\mu] - \mathrm{H}[\nu]| \le d(\mu,\nu)\log(n-1) + H(d(\mu,\nu))$.

תזכורות: הסימון $d(\mu,\nu)$ הוא המרחק בין ההתפלגויות שלמדתם עליו בתרגול הראשון (ומופיע בתחילת חוברת התרגילים הפתורים). הפונקציה H בצד ימין היא פונקצית האנטרופיה $H(p) = p\log(\frac{1}{p}) + (1-p)\log(\frac{1}{1-p})$.