# תרגיל ראשון הגשה: 14.4.2022

### האחדה (6 נקודות)

נתונה פונקציה $f:\{1,\ldots,n\}\to\mathbb{N}$, ונגדיר פונקציה $g:\{1,\ldots,n\}\to\mathbb{N}$ ע"י הנוסחא $g(i)=nf(i)+i-1$.
הראו שהמרחק של $f$ מלהיות מונוטונית לא־יורדת זהה לזה של $g$ (בפרט זה אומר ש־$f$ היא מונוטונית לא־יורדת אם ורק אם $g$ היא כזו).

**הערה:** בפרט זה אומר שאם יש אלגוריתם בדיקת מונוטוניות שעובד רק עבור פונקציות חד־חד־ערכיות, אז אפשר לתרגם אותו לאלגוריתם שעובד עבור כל הפונקציות. זאת מכיוון ש־$g$ היא תמיד חח"ע, ואפשר "לענות" על שאילתה ל־$g$ באמצעות שאילתה בודדת ל־$f$.

### זוגיות מושלמת (12 נקודות)

אנחנו מעוניינים לבדוק פונקציה $f:\{1,\ldots,2n\}\to\{1,\ldots,n\}$ עבור התכונה שזו פונקציה דו־חד־ערכית. באופן פורמלי, המדובר בתכונה שלכל $1\le k\le n$ קיימים $1\le i<j\le 2n$, כך שמתקיים $f(i)=f(j)=k$, ולא קיים $l\neq i,j$ נוסף שעבורו $f(l)=k$. הראו שאפשר לבצע $\epsilon$־בדיקה עבור התכונה הזו עם שגיאה חד־כיוונית ב־$O(n^{2/3}/\epsilon^{1/3})$ שאילתות.

**הדרכה:** השיטה לעשות זאת היא למצוא, עבור פונקציה רחוקה מלהיות דו־חד־ערכית, שלישיה $i<j<l$ שמקיימת $f(i)=f(j)=f(l)$. קודם כל הראו שיש "הרבה" שלישיות זרות כאלה. לפישוט הפתרון, כדאי להשתמש בתוצאת השאלה "לבלוע את החוכמה" שנמצאת ברשימת הקריאה שלכם.

## תרגיל שני      הגשה: 25.5.2022

**גבעה רמה (6 נקודות)**

פונקציה $f:\{1,\ldots,n\}\to\mathbb{N}$ תיקרא "הרית" אם קיים $1\le i\le n$ כך שהצמצום של $f$ ל־$\{1,\ldots,i\}$ הוא מונוטוני לא יורד והצמצום של $f$ ל־$\{i,\ldots,n\}$ הוא מונוטוני לא עולה. הראו שאפשר לבצע $\epsilon$־בדיקה עבור התכונה הזו ב־$O(\log(n)/\epsilon)$ שאילתות. מותר להניח שהפונקציה $f$ היא חד־חד־ערכית (התרגום של הבדיקה לכזו שעובדת לפונקציות כלליות נובע משיקול דומה לזה של השאלה "האחדה" מהתרגיל הקודם; לא צריך להוכיח אותו כאן).

**מסר סמוי (12 נקודות)**

מחרוזת מאורך $k$ היא סידרה של ביטים $B=(b_1,\ldots,b_k)$, כאשר $b_i\in\{0,1\}$ לכל $1\le i\le k$. המחרוזת $B$ תיקרא תת־מחרוזת של מחרוזת $A=(a_1,\ldots,a_n)$ מאורך $n\ge k$, אם קיימים $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ שעבורם מתקיים $a_{i_j}=b_j$ לכל $1\le j\le k$. בהינתן קבוצה סופית $\mathcal{F}$ של מחרוזות, הראו שניתן לבצע (עבור $n$ גדול מספיק) $\epsilon$־בדיקה של מחרוזת קלט $A$ (מבחינת מודל הבדיקה מתייחסים אליה כאל פונקציה מ־$\{1,\ldots,n\}$ אל $\{0,1\}$) עבור התכונה שלא קיימת מחרוזת $B\in\mathcal{F}$ שהיא תת־מחרוזת של $A$, במספר שאילתות שתלוי רק ב־$\epsilon$ וב־$\mathcal{F}$ (ולא ב־$n$).

**הדרכה חלקית:** יש לפחות שתי שיטות שעובדות. אחת מהן קשורה בחלוקה של $\{1,\ldots,n\}$ ל"איזורים" ובדיקה אלו מהם מכילים את שני הערכים. למחרוזת שמספקת את התכונה לא יהיו הרבה איזורים כאלה. השיטה השניה משתמשת באינדוקציה על סכום אורכי המחרוזות ב־$\mathcal{F}$, ובשלב ראשון מחלקת למקרים לפי אלו ערכים מתוך $\{0,1\}$ מופיעים כאות ראשונה של מחרוזת מ־$\mathcal{F}$. במקרה למשל שכל המחרוזות ב־$\mathcal{F}$ מתחילות ב־"1", כדאי בשלב הבא לאתר את אחד מ־$\frac{1}{2}\epsilon n$ מערכי ה־"1" הראשונים ב־$A$ (או לגלות שאין כאלה).

## תרגיל שלישי      הגשה: 30.6.2022

### גלגל ענק (9 נקודות)

בשאלה זו נדון באפשרות לבדוק פרמוטציה $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ עבור התכונה שהיא מורכבת מעגיל בודד בגודל $n$. הראו שקיים $\epsilon$ שעבורו אלגוריתם $\epsilon$־בדיקה לא־אדפטיבי עבור תכונה זו יצטרך $\Omega(\sqrt{n})$ שאילתות לפחות.

**הסברים:** משמעות התכונה הנ"ל היא שקיימים $i_1,\ldots,i_n$, כולם שונים זה מזה, כך שמתקיים $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ לכל $1 \le k < n$ וכן $\sigma(i_n) = i_1$. כמו כן צריך לשים לב לנקודות הבאות.

- המדובר באלגוריתם לבדיקת פרמוטציות, וזה אומר שאם הוא מקבל כקלט פונקציה שאינה חח"ע ועל אז מותר לו לענות כל תשובה שהיא. לכן עליכם להוכיח שאלגוריתם שמבצע מעט מדי שאילתות יטעה בהסתברות גבוהה על קלט שהוא פרמוטציה.
- כדאי לדעת שפעולה מהצורה "מוצאים את הערך של $\sigma(\sigma(i))$" ניתנת לביצוע רק באלגוריתם אדפטיבי, כי היא מורכבת משתי שאילתות שהשניה בהן משתמשת בתוצאה של השאילתה הראשונה.

### קשיים בזוגיות (9 נקודות)

הראו שקיים $\epsilon$, כך ש־$\epsilon$־בדיקה עם שגיאה חד־כיוונית של פונקציה $f : \{1,\ldots,2n\} \to \{1,\ldots,n\}$, עבור התכונה שהיא דו־חד־ערכית (ראו את ההגדרה מהתרגיל הראשון הסמסטר), מצריכה $\Omega(n^{2/3})$ שאילתות.

**הבהרה:** בשביל מלוא הנקודות עליכם להראות שהחסם תקף גם עבור אלגוריתמים אדפטיבים (אבל עדיין עם שגיאה חד צדדית – בתרגיל הבא נראה מה קורה עם שגיאה דו־צדדית).

## תרגיל רביעי הגשה: 18.8.2022

**הערה מרמזת:** סדר השאלות הוא לא בהכרח לפי סדר העברת החומר בהרצאות.

### מושלמות עם פשרות (6 נקודות)

הראו שבדיקה עם שגיאה דו־צדדית של פונקציה $f : \{1, \ldots, 2n\} \to \{1, \ldots, n\}$ עבור דו־חד ערכיות יכולה להתבצע לכל $\epsilon$ קבוע עם $O(n^{1/2})$ שאילתות בלבד.

### צרות עם אופציות (12 נקודות)

הראו שעבור פונקציות $f : \{1, \ldots, 2n\} \to \{1, \ldots, 2n\}$, קיים $\epsilon$ שעבורו צריך $\Omega(n^{2/3})$ שאילתות עבור $\epsilon$־בדיקה שהיא דו־חד־ערכית, אפילו אם השגיאה היא דו־כיוונית.

**שימו לב:** כאן גודל הטווח הוא "גדול מדי". הפונקציה תיקרא דו־חד ערכית אם לכל $1 \le k \le 2n$, או שקיימים בדיוק שני אינדכסים $i < j$ שעבורם $f(i) = f(j) = k$, או שלא קיים אף אינדכס $i$ שעבורו $f(i) = k$.

**לא צריך להוכיח** שמספיק להראות את החסם נגד אלגוריתמים לא־אדפטיבים, כי כבר ראיתם במהלך הסמסטר איך אפשר להרחיב עבור התכונה הזו את החסם לאלגוריתמים אדפטיבים.

**הדרכה:** מותר להניח ש־$n$ הוא זוגי. השיטה הכי "נקיה" לבנות קלטים שיביסו אלגוריתם בדיקה פוטנציאלי מתחילה בחלוקה מקרית של תחום הפונקציה ל־$n/2$ רביעיות זרות, שאח"כ מקצים לכל אחת מהן ערכים מתאימים של $f$, וניתוח החיתוכים שלהן עם קבוצת השאילתות.

**הערה אחרונה:** עוד בעיה ב"עודף אופציות" (הטווח הגדול יותר) היא שחסם עליון לא יכול להתקבל מחיפוש שלישיות בלבד, כפי שנעשה בתרגיל הראשון בקורס. נסו לחשוב מה יכול לעבוד כאן.

### מותר להציץ (6 נקודות)

נניח שמעוניינים לבדוק התפלגות מעל $\{1, \ldots, n\}$ עבור התכונה שהיא יוניפורמית, אבל כאן אנחנו מאפשרים לקבל את ערכי $\mu$ מעל הדגימות בנוסף לדגימות עצמן. באופן יותר מדויק, אלגוריתם בעל $q$ דגימות יקבל גישה למ"מ ב"ת $A_1, \ldots, A_q$ שכולם מתפלגים לפי $\mu$ (עד כאן בדומה למודל בדיקת ההתפלגויות הרגיל), אבל בנוסף לאלו האלגוריתם מקבל גם גם גישה לערכים $\mu(A_1), \ldots, \mu(A_q)$. הראו שעבור המודל הזה, מספר הדגימות הדרוש עבור $\epsilon$־בדיקה תלוי ב־$\epsilon$ בלבד ולא ב־$n$.