תרגיל ראשון הגשה: 18.11.2021

סדר באי־סדר (6 נקודות)

נתון ש־$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ היא פרמוטציה שנבחרת באופן מקרי ויוניפורמי מבין $n!$ האפשרויות. הראו שבהסתברות $1 - o(1)$ מתקיים שתת הקבוצה המקסימלית ש־σ מסדרת בסדר עולה היא מגודל $O(\sqrt{n})$. מותר ורצוי להשתמש בנוסחת סטירלינג.

הסבר למושגים: עבור קבוצה $Q \subseteq \{1, \ldots, n\}$, הפרמוטציה תסדר אותה בסדר עולה אם הצמצום $\sigma|_Q$ היא פונקציה מונוטונית עולה מ־Q ל־$\{1, \ldots, n\}$. אתם צריכים להוכיח שקיים קבוע C, כך שלכל δ קיים N, שעבורם אם $n > N$ אז ההסתברות לקיום קבוצה Q מגודל לפחות $C\sqrt{n}$ שמסודרת בסדר עולה היא פחות מ־δ (בתשובה מותר להשתמש בסימונים o ו־O כל עוד אתם יודעים מה אתם עושים).

התאמה זוגית (6 נקודות)

נתונים שני מרחבי הסתברות μ_1, μ_2 מעל הקבוצה S ושני מרחבי הסתברות ν_1, ν_2 מעל הקבוצה T. נגדיר את $\tau_1 = \mu_1 \times \nu_1$ להיות מרחב הסתברות מעל קבוצת המכפלה $S \times T$ לפי הנוסחה $\tau_1((a,b)) = \mu_1(a) \cdot \nu_1(b)$, ובאופן דומה נגדיר את $\tau_2 = \mu_2 \times \nu_2$ (קל לוודא שאלה אכן פונקציות הסתברות, ואין צורך להוכיח זאת). הראו שהמרחקים בין ההתפלגויות מקיימים $d(\tau_1, \tau_2) \le d(\mu_1, \mu_2) + d(\nu_1, \nu_2) - d(\mu_1, \mu_2) \cdot d(\nu_1, \nu_2)$ (ההגדרה של מרחק variation distance נמצאת בתחילת חוברת התרגילים הפתורים).

הערה: מותר לתת פתרון שעובד רק עבור מרחבי הסתברות בדידים (וזה נכון לכל שאלה שלא מתייחסת במפורש למרחבים רציפים).

סיכויים לרמזי (6 נקודות)

הראו שלכל מספר טבעי $k > 1$ יש קבוע $\alpha_k > 0$ עם התכונה הבאה: לכל פונקציה $f : [0,1] \times [0,1] \to \{0,1\}$ שהיא סימטרית (מתקיים $f(x,y) = f(y,x)$ לכל $x, y \in [0,1]$), ומדידה (המונח "מדידה" אומר כאן שאם X ו־Y הם משתנים מקריים ב"ת שנבחרים יוניפורמית מתוך הקטע $[0,1]$, אז ביטויים כמו "$f(X,Y) = 1$" הם מאורעות שאפשר לנתח עבורם הסתברויות), אם $X_1, \ldots, X_k$ הם מ"מ ב"ת לחלוטין הנבחרים יוניפורמית מ־$[0,1]$, אז לפחות לאחד משני המאורעות "לכל $1 \le i < j \le k$ מתקיים $f(X_i, X_j) = 0$" ו־"לכל $1 \le i < j \le k$ מתקיים $f(X_i, X_j) = 1$" יש הסתברות לפחות α_k.

הערה: שימו לב ששאלה זו כן מדברת על מרחבים רציפים.

רמז: אפשר למצוא קשר למרחב עם מספר קבוע גדול יותר של משתנים מקריים.

תרגיל שני   הגשה: 23.12.2021

גלגלים מסתובבים (6 נקודות)

עבור $r \in \mathbb{N}$ נתון, תהי V קבוצה של kr נקודות על מעגל, מרווחות במרווחים שווים. אפשר להניח שהמדובר במעגל היחידה ושמתחילים מהנקודה על ציר ה־x החיובי, ואז, למשל עבור $k = r = 2$, המדובר בקבוצה $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$. יהיו $V_1,\ldots,V_r$ קבוצות המחלקות את V באופן שווה (ז"א שכל V_i היא ת"ק של V מגודל k, וקבוצות אלו זרות זו לזו). הראו שאם k גדול מספיק (כפונקציה של r) אז אפשר למצוא בכל V_i קודקודים של משולש $t_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ (לא מנוון, הקודקודים שונים זה מזה) כך ש־$t_1,\ldots,t_r$ חופפים.

הערה: לא צריך באמת להתעסק בגיאומטריה של המישור, אפשר להתייחס לזה כשאלה בחישוב בשלמים מודולו kr.

רמז: שימו לב לשם של השאלה.

כל אחד את עצמו (8 נקודות)

נתון גרף (פשוט, לא מכוון) G עם n צמתים ודרגה חסומה מלמעלה ע"י d. ננסה לצבוע את הגרף ע"י $3d$ צבעים באופן הבא:

- לפני השלב הראשון כל הצמתים צבועים בצבע "1".
- בכל שלב, כל צומת שיש לו שכן שצבוע באותו צבע כמוהו, בוחר באופן יוניפורמי (וב"ת בשלבים קודמים ו/או צמתים אחרים) צבע מתוך הקבוצה $\{1,\ldots,3d\}$ (כן, יש סיכוי קטן שישאר באותו צבע).

הראו שתוחלת מספר השלבים עד שמצאנו צביעה חוקית (לאף צומת אין שכן מאותו צבע) היא $O(\log(n))$.

רמז: כדאי קודם לחסום את תוחלת מספר הצמתים שיש להם שכן מאותו צבע בשלב ה־k. על חסם טוב מספיק ועשוי היטב תוכלו לקבל יותר מחצי הנקודות של השאלה.

הערה: אלו מכם שלמדו חישוב מבוזר בוודאי מזהים את צורת הצגת האלגוריתם. זהו מודל חישובי שבו יש מעבד בכל צומת של הגרף, וכל התקשורת בין המעבדים מתבצעת רק דרך קשתות הגרף.

המכנה המשותף (6 נקודות)

עבור $(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}) \in \{0,1\}^k$ היא המחרוזת $(v_1,\ldots,v_n) \in \{0,1\}^n$ של מחרוזת k תת־מחרוזת מאורך $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ מתאימים. עבור שתי מחרוזות $v = (v_1,\ldots,v_n)$ ו־$w = (w_1,\ldots,w_n)$ נסמן ב־$k(v,w)$ את האורך המקסימלי של מחרוזת שהיא תת־מחרוזת גם של v וגם של w (לא בהכרח עם אותם אינדכסים). הראו שקיים קבוע $\alpha > \frac{1}{2}$ (חשוב שזה יהיה גדול ממש מ־$\frac{1}{2}$), כך שעבור n גדול מקבוע גלובלי מתאים, ומחרוזות v ו־w שנבחרות באופן יוניפורמי וב"ת מ־$\{0,1\}^n$, מתקיים $\mathrm{E}[k(v,w)] \ge \alpha n$.

רמז: זה מסובך לנתח את התוחלת של אורך תת־המחרוזות המשותפת הארוכה ביותר. במקום זה נסו לנתח את האורך של תת־מחרוזת משותפת שאינה בהכרח הארוכה ביותר, אבל שעדיין תהיה לה תוחלת גבוהה מספיק.

תרגיל שלישי הגשה: 27.1.2022

סף למעגלים (10 נקודות)

הראו, עבור כל k קבוע, שהפונקציה $f(n) = 1/n$ היא פונקצית סף לקיום מעגל מגודל k בגרף מקרי: אם $p(n) = o(1/n)$, אז הגרף המקרי $G(n, p(n))$ מכיל מעגל מגודל k בסיכוי $o(1)$, ואם $p(n) = \omega(1/n)$, אז הגרף המקרי $G(n, p(n))$ מכיל מעגל מגודל k בסיכוי $1 - o(1)$.

הבהרות: המעגלים לא חייבים להיות תתי־גרף מושרים. החסם התחתון (המקרה $p(n) = o(1/n)$) שווה 2 נקודות, והחסם העליון שווה 8 נקודות. המשמעות של "לכל k קבוע" היא שלחסם ההסתברות מותר להיות תלוי ב־k. הוא צריך לשאוף לערך האסימפטוטי לכל k "בנפרד" (לא במידה שווה) כאשר n שואף ל־∞.

הדרכה: סימונים מופשטים מתאימים יכולים לעזור הרבה. למשל, אפשר לסמן ב־$\mathcal{C}$ את קבוצת כל המעגלים מאורך k בגרף השלם עם n צמתים, ועבור מעגל $C \in \mathcal{C}$ לסמן ב־X_C את מ"מ האינדיקטור עבור המאורע ש־C מעגל בגרף המקרי G. כדאי גם לשים לב, **ואין צורך להוכיח את זה**, שקבוצה בת $l < k$ קשתות בתוך מעגל C מגודל k מכסה לפחות $l + 1$ צמתים.

מרטינגל בריבוע (4 נקודות)

יהי $X_0, X_1, \ldots$ מרטינגל המהמר מההרצאה (ז"א שבוחרים מ"מ ב"ת $Y_1, Y_2, \ldots$ שכל אחד מהם נבחר יוניפורמית מתוך $\{-1, 1\}$, ומגדירים $X_0 = 0$ ו־$X_m = \sum_{i=1}^{m} Y_i$). לכל מספר שלם $m \geq 0$ נגדיר $Z_m = (X_m)^2 - m$. הראו ש־$Z_0, Z_1, \ldots$ הוא גם מרטינגל.

הערה: זה מפתה לנסות להשתמש במרטינגל $Z_0, Z_1, \ldots$ על מנת לחסום למשל את $\Pr[X_m > 2\sqrt{m}]$, אבל זה לא יצליח. נסו לחשוב מדוע.

מתמקדים (6 נקודות)

נתון תהליך הסתברותי שפולט ערכים ב־$\mathbb{R}$. לא נתון כלום על ההתפלגות של הערכים, פרט לזה שכל הרצה של התהליך היא ב"ת בכל ההרצות הקודמות, וכן שקיימים מספרים $a < b$, כך שבהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ מתקבל ערך בין a ל־b. הראו, לכל $0 < \delta < 1$, שבאמצעות $O(\log(1/\delta))$ קריאות לתהליך אפשר לקבל ערך שבהסתברות לפחות $1 - \delta$ יהיה בין a ל־b.

הבהרה: אין מידע מהם a ו־b, פרט לזה שהם קיימים. על האלגוריתם שאתם בונים לפלוט את הערך המבוקש ללא מידע מוקדם על a ו־b.

תרגיל רביעי הגשה: 10.3.2022

לרצות את כולם (6 נקודות)

נתונים מרחבי הסתברות $\mu_1, \ldots, \mu_k$, כולם מעל אותה קבוצת בסיס סופית S. נגריל מאורע E (כזכור מאורע הוא ת"ק של S) באופן יוניפורמי מבין כל תתי־הקבוצה של S. הראו שבהסתברות לפחות 2^{-k}, מתקיים $\mu_i(E) \geq \frac{1}{2}$ לכל $1 \leq i \leq k$.

בלי עצמות במרק (6 נקודות)

נניח ש־G הוא גרף עם דרגה מקסימלית קבועה d, בעל n צמתים ו־m קשתות. נבחר תת־קבוצה U של קבוצת הצמתים V ע"י כך שכל צומת של V יבחר להיות ב־U בהסתברות $p = 1/\log(m)$, באופן ב"ת בצמתים האחרים. הראו שההסתברות שאין קשתות בתוך U היא $(1-p^2)^{(1\pm o(1))m}$.

הבהרות: מדובר כאן גם בחסם עליון וגם בחסם תחתון. הרכיב "$o(1)$" בביטוי יכול להיות כל פונקציה שתלויה ב־m ומתכנסת ל־0 כאשר m שואף ל־∞, ויכולה להיות תלויה גם ב־d (כי אמרנו שהוא "קבוע"). זו לא צריכה להיות אותה פונקציה לחסם העליון והחסם התחתון, ואין לה תלות ישירה ב־n (אבל ממילא אפשר להניח שמתקיים $2m/d \leq n \leq 2m$).

לא ממריא (6 נקודות)

נתון ש־X הוא משתנה מקרי מעל קבוצת כל המספרים הטבעיים (לא סופית, אבל עדיין בדידה), ונתון שהתוחלת של X היא סופית. הראו שגם האנטרופיה של X היא בהכרח סופית.

סודות ושקרים (12 נקודות)

חישבו על האפשרות לכתוב אלגוריתם דטרמיניסטי שנדרש למצוא ערך לא ידוע $k \in \{1, \ldots, n\}$ באמצעות q שלבים. בשלב ה־i של האלגוריתם, האלגוריתם בונה קבוצה A_i ומקבל תשובה לשאלה "האם $k \in A_i$". מותר לאלגוריתם לבנות את A_i בהסתמך על התשובות הקודמות עבור $A_1, \ldots, A_{i-1}$. לאחר q שלבים האלגוריתם פולט מספר $k' \in \{1, \ldots, n\}$.

הבעיה כאן היא שבכל שלב האלגוריתם מקבל את התשובה הנכונה לשאלה "האם $k \in A_i$" בהסתברות $\frac{9}{10}$, ומקבל תשובה שקרית בהסתברות $\frac{1}{10}$, כאשר ההסתברות לשקר היא ב"ת ביחס לכל מה שקרה בשלבים הקודמים של האלגוריתם (וגם ב"ת בזהות של A_i שהאלגוריתם בנה).

הראו שקיימים קבועים $\alpha, \beta > 0$ (לא תלויים ב־n), כך שעבור כל n גדול מספיק, אם האלגוריתם בסוף נותן את התשובה הנכונה (ז"א מתקיים $k' = k$) בהסתברות לפחות $1 - \alpha$, אז בהכרח מתקיים $q \geq (1+\beta)\log(n)$.

הבהרות: לא נכתבו הגבלות על ה"אלגוריתם", ובאמת לא נתון עבורו זמן חישוב מסויים, או אפילו שהוא ניתן בכלל לחישוב. נתון רק שבניית A_i תלויה באופן דטרמיניסטי בתשובות שניתנו בשלבים הקודמים. אתם אמורים לתת חסם תחתון על מספר השלבים האפשרי של אלגוריתם "מוצלח" כזה: אם לכל $k \in \{1, \ldots, n\}$ מתקיים $k' = k$ בהסתברות מספיק גבוהה, אז מספר השלבים לא יכול להיות קטן.

הדרכה: מכיוון שהאלגוריתם הוא דטרמיניסטי, התשובה שלו תלויה אך ורק בסדרת התשובות ("כן" או "לא") שניתנו במהלך q השלבים. כתבו משתנה מקרי עבור סדרה זו, ונסו לחסום את האנטרופיה שלו ביחס למ"מ אחרים כאשר הערך k נבחר באופן יוניפורמי מתוך $\{1, \ldots, n\}$.