פתרון לתרגיל הראשון

לבלוע את החוכמה

הערה: יש מקרה קיצון עם שוויון, וזאת כאשר $p = 0$ ו־$\mathcal{F}$ אינה מכילה קבוצות מגודל q או פחות (שני האגפים שווים אז ל־0). לא הורדתי נקודות על התעלמות ממקרה זה. הפתרון כאן הוא תחת ההנחה $p > 0$.

נגדיר את מרחב ההסתברות τ על זוגות של ת"ק $Q, Q' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ באופן הבא:

- ראשית נגריל את Q לפי ν, ז"א לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$ נבחר אותו להיות איבר ב־Q בהסתברות p, באופן ב"ת בבחירות לאינדכסים אחרים ב־$\{1, \ldots, n\}$.
- אם מתקיים $|Q| \geq q$, אז נקבע את $Q' = Q$.
- אם מתקיים $|Q| < q$, אז נגריל את $R \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus Q$ באופן יוניפורמי מכל תתי־הקבוצה האפשריים בגודל $q - |Q|$, ואז נקבע $Q' = Q \cup R$.

נסמן ב־A_1 את המאורע "קיימת $F \in \mathcal{F}$ שעבורה מתקיים $F \subseteq Q$", וב־A_2 את המאורע "קיימת $F \in \mathcal{F}$ שעבורה מתקיים $F \subseteq Q'$". ראשית נשים לב שמתקיים $\Pr_\tau[A_2] \geq \Pr_\tau[A_1]$, מכיוון שתמיד מתקיים $Q \subseteq Q'$. כמו כן מתקיים $\Pr_\tau[A_1] = \Pr_\nu[A]$ כי Q מתפלג באופן זהה תחת τ ו־ν.

עתה נסמן ב־B את המאורע "$|Q| > q$". נשים לב שמתקיים $\Pr_\tau[B] < \frac{pn}{q}$ לפי אי שוויון מרקוב (קל לראות שמתקיים $\mathrm{E}_\tau[|Q|] = pn$). כמו כן, לכל $t \leq q$, ההתפלגות של Q' תחת התנאי "$|Q| = t$" זהה להתפלגות ν, מכיוון שאז, לכל $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ מגודל q, חישוב ישיר של ההסתברויות לקבלת T נותן $\Pr_\tau[Q' = T \mid |Q| = t] = \binom{q}{t} / \binom{n}{t} \binom{n-t}{q-t} = 1/\binom{n}{q}$. לכן ההתפלגות של Q' תחת τ בהינתן המאורע $\neg B$ זהה להתפלגות של Q תחת μ.

מאלו מתקיים $\Pr_\mu[A] = \Pr_\tau[A_2 | \neg B] \geq \Pr_\tau[A_2 \wedge \neg B] \geq \Pr_\tau[A_2] - \Pr_\tau[B] > \Pr_\tau[A_2] - \frac{pn}{q}$, ולסיכום נקבל $\Pr_\mu[A] > \Pr_\tau[A_2] - \frac{pn}{q} \geq \Pr_\tau[A_1] - \frac{pn}{q} = \Pr_\nu[A] - \frac{pn}{q}$ כנדרש.

לחפש את הצדק

נניח ש־$\epsilon \leq \frac{1}{4}$ (ז"א שנגדיר $\eta = \frac{1}{4}$), ונסתכל על הפונקציה $f(k)$ שמוגדרת להיות שווה ל־$\lceil k/2 \rceil$ אם $1 \leq k \leq 2\lceil \epsilon n \rceil$, ושווה ל־$k$ אם $2\lceil \epsilon n \rceil < k \leq n$. הפונקציה הזו היא ϵ־רחוקה מפרמוטציה, כי צריך לשנות אותה בלפחות אחד מהאיברים $\{2k-1, 2k\}$ לכל $1 \leq k \leq \lceil \epsilon n \rceil$. מצד שני, האלגוריתם ידחה את הפונקציה הזו אם ורק אם קיים $1 \leq k \leq \lceil \epsilon n \rceil$ שעבורו $\{2k-1, 2k\} \subset Q$.

עבור k קבוע נחשב את ההסתברות המתאימה: $\Pr[\{2k-1, 2k\} \subset Q] = \binom{n-2}{q-2} / \binom{n}{q} = \frac{q(q-1)}{n(n-1)} < (q/n)^2$.
על כן, לפי החסם על איחוד המאורעות, הסיכוי לדחיה כל שהיא חסום ע"י $\lceil \epsilon n \rceil (q/n)^2 \leq 2\epsilon q^2/n$. בחירה למשל של $c = \frac{1}{2}$ תגרום לסיכוי של פחות מ־$\frac{2}{3}$ לדחות אם $q \leq c\sqrt{n/\epsilon}$.

הערה: למרות שזה לא כתוב למעלה, הנחנו גם שמתקיים $n \geq 4/\epsilon$. עבור n קטנים יותר מתקיים $c\sqrt{n/\epsilon} < 1$, וברור שאי אפשר לדחות את הפונקציה על סמך קבוצה ריקה של שאילתות.

למצוא את הצדק

אנחנו נשתמש בתוצאת השאלה "לבלוע את החוכמה", כאשר $\mathcal{F}$ היא קבוצת הזוגות שמראים שהפונקציה אינה חח"ע. במדויק, $\mathcal{F} = \{\{i, j\} : f(i) = f(j)\}$. אנחנו נראה שקיים c' כך שאם נבחר כל אינדכס $1 \leq i \leq n$ להיות ב־Q בהסתברות $c'/\sqrt{\epsilon n}$, אז בהסתברות לפחות $\frac{5}{6}$ נקבל זוג $i, j \in Q$ שעבורם $f(i) = f(j)$. ע"י כך

שנקבע $c = 6c'$, נוכל עתה להשתמש בתוצאת "לבלוע את החוכמה", ולהסיק שאם אנחנו בוחרים את Q באופן יוניפורמי מכל הקבוצות מגודל $\lceil c\sqrt{n/\epsilon}\rceil$ אז נתפוש זוג כזה בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$.

בשלב הראשון נראה שאם f היא ϵ־רחוקה מפרמוטציה, אז קיימת קבוצה גדולה יחסית $\mathcal{F}'$ של זוגות זרים שכל אחד מהם מהווה דוגמה לכך ש־f אינה חח"ע. לכל $1 \leq k \leq n$ נסמן ב־$w_k = |f^{-1}(k)|$ את מספר האינדכסים שמקבלים את הערך k לפי f, ונטען שהמספר המינימלי של שינויים שהופכים את f לפרמוטציה הוא בדיוק $\sum_{k=1}^{n}\max\{0, w_k - 1\}$. לשם כך נשים לב שעל מנת להפוך את f לחח"ע אנחנו בוודאי צריכים לשנות את כל הערכים שלה בכל קבוצה מהצורה $f^{-1}(k)$ פרט לאיבר אחד מהם. מצד שני, אפשר לבצע שינוי כזה ובאמת להפוך את f לפרמוטציה: גודל קבוצת הערכים $\{1,\ldots,n\} \setminus f(\{1,\ldots,n\})$ הוא בדיוק $n - |\{k : f^{-1}(k) \geq 1\}| = \sum_{k=1}^{n}\max\{0, w_k - 1\}$ (על מנת להוכיח את השוויון משתמשים ב־$\sum_{k=1}^{n} w_k = |\{1,\ldots,n\}| = n$), ולכן ניתן לבחור באופן שרירותי $w_k - 1$ איברים שונים ב־$f^{-1}(k)$ לכל k שעבורו $w_k > 1$, ולתת לכל אלו ערכים שונים זה מזה מתוך $\{1,\ldots,n\} \setminus f(\{1,\ldots,n\})$.

לבניית הקבוצה $\mathcal{F}'$, לכל קבוצה $f^{-1}(k)$ מגודל גדול מ־1, נוציא מתוכה $\lfloor w_k/2 \rfloor$ זוגות זרים באופן שרירותי. זוהי קבוצה של זוגות זרים לפי הגדרה (עבור $k \neq l$ בפרט מתקיים ש־$f^{-1}(k)$ ו־$f^{-1}(l)$ הן קבוצות זרות). כמו כן, כל איבר ב־$\mathcal{F}'$ הוא בפרט איבר ב־$\mathcal{F}$. לבסוף, גודל $\mathcal{F}'$ הוא $\sum_{k=1}^{n}\lfloor w_k/2 \rfloor \geq \sum_{k=1}^{n}\max\{0, \frac{1}{2}(w_k - 1)\}$. לכן, אם f היא ϵ־רחוקה מפרמוטציה, אז מתקיים $|\mathcal{F}'| \geq \epsilon n/2$.

נבחר עתה $c' = 2$, ונחסום את הסיכוי שלא נתפוש איבר ב־$\mathcal{F}'$ בעת בחירת Q (לפי השיטה של לבחור כל אינדכס להיות ב־Q בהסתברות $c'/\sqrt{\epsilon n}$). לכל איבר $\{i, j\} \in \mathcal{F}'$, הסיכוי שלא נתפוש אותו הוא בדיוק $1 - (c'/\sqrt{\epsilon n})^2 = 1 - 4/\epsilon n$. מכיוון שאיברי $\mathcal{F}'$ זרים זה לזה, הסיכוי שלא נתפוש אף אחד מהם (לפי מאורעות ב"ת) הוא $(1 - 4/\epsilon n)^{|\mathcal{F}'|} < e^{-4|\mathcal{F}'|/\epsilon n} \leq e^{-2} < \frac{1}{6}$. על כן בהסתברות גדולה מ־$\frac{5}{6}$ נתפוש איבר ב־$\mathcal{F}'$, ובפרט נתפוש איבר ב־$\mathcal{F}$, כי זו מכילה את $\mathcal{F}'$.

פתרון לתרגיל שני

להקיא את החוכמה

הפעם נגדיר מרחב הסתברות τ על זוגות $Q, Q' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ באופן הבא:

- ראשית נגריל את Q' לפי ν.
- אם מתקיים $|Q'| \leq q$, אז נקבע $Q = Q'$.
- אם מתקיים $|Q'| > q$, אז נגריל את Q יוניפורמית מתתי־הקבוצה של Q' שיש להם q איברים בדיוק.

כמו בפתרון השאלה "לבלוע את החוכמה" מהתרגיל הקודם, נסמן ב־A_1 את המאורע "קיימת $F \in \mathcal{F}$ שעבורה מתקיים $F \subseteq Q$", וב־A_2 את המאורע "קיימת $F \in \mathcal{F}$ שעבורה מתקיים $F \subseteq Q'$". בפרט שוב מתקיים $\Pr_\tau[A_2] \geq \Pr_\tau[A_1]$ מכיוון שתמיד מתקיים $Q \subseteq Q'$. הפעם מתקיים $\Pr_\tau[A_2] = \Pr_\nu[A]$, כי Q' מתפלג באופן זהה תחת τ ו־ν.

עתה נסמן ב־B את המאורע "$|Q'| < q$". מתקיים $\Pr_\tau[B] < e^{-(p-q/n)^2 n/2p}$ לפי אי־שוויון צ'רנוף האחרון מהפרק המתאים בחוברת התרגול של הקורס "שיטות הסתברותיות ואלגוריתמים", כאשר מציבים שם $\mu = pn$ ו־$\delta = (pn - q)/pn = (p - q/n)/p$. כמו כן, נימוק מאוד דומה לזה של "לבלוע את החוכמה" מראה שההתפלגות של Q תחת τ בהינתן המאורע $\neg B$ זהה להתפלגות של Q תחת μ.

מאלו נובע שמתקיים $\Pr_\mu[A] = \Pr_\tau[A_1|\neg B] = \Pr_\tau[A_1 \wedge \neg B]/\Pr_\tau[\neg B] < \Pr_\tau[A_1]/(1 - e^{-(p-q/n)^2 n/2p})$,

ולכן $\Pr_\nu[A] = \Pr_\tau[A_2] \geq \Pr_\tau[A_1] > (1 - e^{-(p-q/n)^2 n/2p})\Pr_\mu[A]$ כנדרש.

לא למצוא את הצדק

סעיף ראשון: נשתמש בטיעון דומה להתחלת הטיעון של בדיקות קנוניות במודל הגרפים הצפוף. בהינתן האלגוריתם המקורי, ראשית דבר נדאג שהוא תמיד מבצע את מספר השאילתות המקסימלי שלו (פשוט בכל מקרה שבו נרצה לקבל או לדחות, נדאג קודם לבצע עוד שאילתות שרירותיות עד שיבוצעו בדיוק q שאילתות סה"כ). עתה, במקום להריץ את האלגוריתם על f, נריץ אותו על $f \circ \sigma$ (הפונקציה המוגדרת ע"י $(f \circ \sigma)(i) = f(\sigma(i))$ לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$), כאשר σ היא פרמוטציה שנבחרת באופן יוניפורמי מבין $n!$ האפשרויות.

נשים לב שלכל פונקציה f, המרחק של f ושל $f \circ \sigma$ מהתכונה של להיות פרמוטציה הוא זהה (אפשר להשתמש בביטוי החישוב שפותח בפתרון התרגיל הראשון, אבל זה באמת ברור גם בלי הוכחה). כמו כן, לאחר שהאלגוריתם שאל את השאילתות $i_1, \ldots, i_{j-1}$, נשים לב ש־$\sigma(i_j)$ מתפלג באופן יוניפורמי מעל הקבוצה $\{1, \ldots, n\} \setminus \{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_{j-1})\}$, בלי קשר לאיך האלגוריתם קבע את i_j (כמו בטיעון עבור בדיקות קנוניות במודל הגרפים הצפוף – כאשר σ מוגרלת יוניפורמית, התפלגות $\sigma(i_j)$ בהינתן המאורע $\bigwedge_{l=1}^{j-1} \sigma(i_l) = a_l$ תהיה יוניפורמית מעל $\{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$). על כן, אם מתרגמים את השאילתות מהפונקציה $f \circ \sigma$ לשאילתות מהפונקציה f, נקבל קבוצת שאילתות שנבחרה באופן יוניפורמי מכל תתי־קבוצה האפשריים של $\{1, \ldots, n\}$ מגודל Q.

סעיף שני: נניח שכבר בצענו את השינוי לפי הסעיף הראשון, ז"א שעתה יש לנו אלגוריתם שבודק את f באמצעות בחירה של קבוצת השאילתות Q באופן יוניפורמי מכל תתי־הקבוצה מגודל q. עתה נשים לב שאם קיימים $i \neq j$ בתוך Q שעבורם $f(i) = f(j)$, אז אפשר להניח שהאלגוריתם דוחה תמיד, כי במקרה כזה הפונקציה f לא יכולה להיות פרמוטציה.

עתה נבצע את השינוי הנוסף הבא באלגוריתם: במקום להריץ אותו על f, נריץ אותו על $\tau \circ f$ (הפונקציה המוגדרת ע"י $(\tau \circ f)(i) = \tau(f(i))$ לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$) כאשר τ היא פרמוטציה שנבחרת יוניפורמית. גם הפעם נשים לב שלכל f המרחק של f ושל $\tau \circ f$ מהתכונה של להיות פרמוטציה הוא זהה. עתה יש

בדיוק שתי אפשרויות לכל קבוצת שאילתות Q: או שיש $i \neq j$ בתוך Q שעבורם $f(i) = f(j)$ (ואז מתקיים גם $(\tau \circ f)(i) = (\tau \circ f)(j)$ והאלגוריתם דוחה בהסתברות 1), או שסדרת הערכים $\langle (\tau \circ f)(i) : i \in Q \rangle$ היא סדרת ערכים שמתפלגת באופן יוניפורמי מעל כל הסדרות האפשריות של q ערכים ללא חזרות מתוך $\{1, \ldots, n\}$. במקרה השני הסתברות הדחיה של האלגוריתם אינה תלויה בערכים המקוריים של f מעל Q.

עולם של קליקות

נתחיל כמו בבדיקת דו־צביעה: האלגוריתם שלנו, בשלב הראשון, יבחר קבוצה $S = \{u_1, \ldots, u_s\}$ של צמתים, עבור $s = 16/\epsilon - 4\ln(\epsilon)/\epsilon$, כאשר כל u_i נבחר באופן יוניפורמי וב"ת (עם אפשרות לחזרות). כזכור, בהסתברות לפחות $\frac{5}{6}$, לכל צמתי הגרף שיש להם לפחות $\frac{\epsilon}{4}n$ שכנים יהיה לפחות שכן אחד ב־S, פרט ללא יותר מ־$\frac{\epsilon}{4}n$ צמתים כאלה.

במידה והתנאי למעלה אכן מתקיים, כזכור אפשר להפוך את כל הצמתים ללא שכן ב־S לצמתים חסרי קשתות באמצעות לא יותר מ־$\frac{\epsilon}{2}n^2$ שינויים בגרף (מה שאצלנו הופך אותם לקליקות זרות מגודל 1).

בשלב זה היינו יכולים להסתכל על כל החלוקות האפשריות של S (כל החלוקות לקבוצות לא־ריקות, כולל אפילו החלוקה ל־s צמתים בודדים – יש לא יותר מ־s^s חלוקות סה"כ), ולכל חלוקה כזו לבדוק את ההרחבה שלה לחלוקה של כל צמתי הגרף. עם זאת, אנחנו יכולים לחסוך במספר השאילתות אם קודם כל נצמצם את הדיון לחלוקה יחידה של S (בניגוד לבדיקת דו־צבעיות ששם זה לא אפשרי).

לשם כך נשאל את כל הזוגות של צמתים ב־S (סה"כ $\binom{s}{2} = O((\log(1/\epsilon))^2/\epsilon^2)$ שאילתות), ונבדוק אם יש חלוקה של S לקליקים זרים (אפשר למשל לבצע חיפוש לעומק משולב בווידוא המבנה מול צמתים שכבר ביקרו בהם). אם יש חלוקה כזו אז היא יחידה, ואם אין אז אפשר כבר לדחות בשלב זה, כי אם הגרף המקורי היה איחוד של קליקים זרי צמתים, אז גם תת־הגרף המושרה על S היה כזה. נגדיר מהחלוקה $S_1, \ldots, S_k$ של S חלוקה של כל צמתי הגרף G בצורה הבאה: אם $v \in S$, אז נבחר את ה־i כך ש־$v \in S_i$, ונשייך אותו לקבוצה V_i. אחרת, אם $v \in V \setminus S$ ואין לו שכן ב־S אז הוא יהיה בקבוצה מגודל 1 משל עצמו (ובפרט לא יהיה בקבוצות $(V_1, \ldots, V_k$). במקרה שנותר נבחר S_i כך שיש ל־v שכן ב־S_i (אם יש כמה אפשרויות, נבחר את ה־i הקטן ביותר מביניהן), ונגיד ש־V שייך לקבוצה V_i.

בשלב זה נבחר באופן מקרי ויוניפורמי קבוצה T של זוגות של צמתים $(v_1, w_1), \ldots, (v_t, w_t)$ (באופן ב"ת, עם אפשרות לחזרות), עבור $t = 4/\epsilon$. עבור החלוקה של S, נבדוק האם יש זוג מפר: זוג (v_j, w_j) יהיה מפר אם קיים $1 \leq i \leq k$ כך ש־v_j ו־w_j משוייכים לאותו V_i (ובפרט הם לא צמתים מ־$V \setminus S$ ללא שכנים ב־V) ועם זאת $v_j w_j$ אינה קשת ב־G, או שקיימים $1 \leq i \neq i' \leq k$ כך ש־v_j משוייך ל־V_i, w_j משוייך ל־$V_{i'}$, ועם זאת $v_j w_j$ היא כן קשת ב־G. אם לחלוקה שהגדרנו יש לה יותר מ־$\frac{\epsilon}{2}n^2$ זוגות מפירים, הסיכוי שנקבל אותה חסום ע"י $\frac{1}{6}$. מספר השאילתות כאן הוא $(2s+1)t = O(\log(1/\epsilon)/\epsilon^2) = o((\log(1/\epsilon))^2/\epsilon^2)$.

בסופו של דבר, נקבל את הגרף אם ורק אם לא דחינו באף אחד מהשלבים. גרף שהוא אכן איחוד של קליקות יתקבל תמיד: לכל קבוצה S שיכולה להיבחר, החלוקה שלה לפי הקליקות של G תהיה חסרת זוגות מפירים (כזכור אנחנו לא בודקים בכלל זוגות עם צומת שאינו מ־S ואין לו קשת ל־S), ולכן האלגוריתם יקבל.

מצד שני, נניח שהגרף G מתקבל בהסתברות גדולה מ־$\frac{1}{3}$. הדבר אומר שבהסתברות גדולה מ־0, האלגוריתם מקבל תוך כדי כך ש־S מקיימת את התנאי ביחס לצמתים מרובי שכנים, ובנוסף יש עבורה חלוקה (יחידה) עם לא יותר מ־$\frac{\epsilon}{2}n^2$ זוגות מפירים. נוכל אז לשנות את G לגרף שהוא איחוד זר של קליקות בצורה הבאה:

- את כל הצמתים ללא שכנים ב־S נהפוך לצמתים חסרי שכנים בכלל. כזכור מספר השינויים כאן חסום ע"י $\frac{\epsilon}{2}n^2$.
- נותר לטפל בקשתות בתוך קבוצת הצמתים $V_1 \cup \cdots \cup V_k$, כאשר אנחנו מתייחסים להרחבה של החלוקה שהתקבלה של S. את אלו נשנה כך שכל V_i תהיה קליקה, ללא קשתות בין V_i ל־V_j עבור $1 \leq i < j \leq k$. מספר השינויים כאן זהה למספר הזוגות המפירים, ולכן אינו עולה על $\frac{\epsilon}{2}n^2$.

סה"כ בצענו בגרף לא יותר מ־ϵn^2 שינויים, כנדרש.

פתרון לתרגיל הסופי

בערך מונוטוניות

הפתרון שנראה כאן הוא לפי האפשרות הראשונה המוזכרת ברמז. אתם מוזמנים לקרוא על האפשרות השניה, והכללות נוספות של האלגוריתם, במאמר נגיש מעמוד הבית שלי: E. Fischer, O. Lachish, Y. Vasudev: Trading query complexity for sample-based testing and multi-testing scalability.

האלגוריתם שננתח הוא בעל שני שלבים:

- ראשית נבדוק את המונוטוניות של הפונקציה רק ביחס לקבוצת האינדכסים $T = \{k, 2k, \ldots, \lfloor\frac{n}{k}\rfloor k\}$. נבצע כאן $\frac{\epsilon}{4}$־בדיקה, ונדאג שהאלגוריתם ידחה קלטים רחוקים בהסתברות $\frac{2}{3}$. אם הבדיקה דחתה בשלב זה, נעצור מיידית ונדחה את הקלט.
- עתה נבצע $5/\epsilon$ סבבים ב"ת של התהליך הבא: נבחר $1 \le i \le n$ באופן יוניפורמי, ונבדוק שאכן מתקיים $f(\lfloor\frac{i}{k}\rfloor k - k) \le f(i) \le f(\lceil\frac{i}{k}\rceil k + k)$ (לשם הדיוק הפורמלי נניח שמתקיים $f(j) = -\infty$ עבור $j < 1$ ו־$f(j) = +\infty$ עבור $j > n$). אם לפחות אחת מהבדיקות הנ"ל נכשלה אז נדחה את הקלט, ואם לא אז בסוף האלגוריתם נקבל אותו. נשים לב שאם שלב זה מקבל בהסתברות לפחות $\frac{1}{3}$, אז יש לא יותר מ־$\frac{\epsilon}{4}n$ אינדכסים "רעים" שאינם מקיימים את התנאי הנבדק.

אם הפונקציה f היא k־בערך מונוטונית, אז היא תתקבל בהסתברות 1. הסיבה לכך היא היא שכל הבדיקות שלנו בוצעו אך ורק ביחס לאינדכסים שמרחקם זה מזה הוא לפחות k (בשלב הראשון הגבלנו את עצמנו לקבוצה T שאיבריה במרחקים של לפחות k זה מזה, ולכן הפונקציה תקיים את תנאי המונוטוניות מעליהם).

עתה נניח שהאלגוריתם מקבל בהסתברות לפחות $\frac{1}{3}$, ונבנה פונקציה f' שהיא $10k$־בערך־מונוטונית וגם ϵ־קרובה ל־f. נשים לב שבפרט זה אומר שכל אחד מהשלבים לכשעצמו העביר את f בהסתברות לפחות $\frac{1}{3}$. הבניה של f' תתבצע באופן הבא.

- ראשית נקבע להיות את הצמצום של f' ל־T להיות הפונקציה המונוטונית הכי קרובה ל־f מעל T. מספר ההבדלים בין f ל־f' מעל T אינו עולה על $\frac{\epsilon}{4}\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$, כי אחרת השלב הראשון של האלגוריתם היה דוחה את הקלט בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$.
- לכל $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus T$, אם $f'(\lfloor\frac{i}{k}\rfloor k - k) \le f(i) \le f'(\lceil\frac{i}{k}\rceil + k)$ אז נגדיר $f'(i) = f(i)$, ואחרת נגדיר את $f'(i)$ להיות ערך שרירותי בין $f'(\lfloor\frac{i}{k}\rfloor k - k)$ ל־$f'(\lceil\frac{i}{k}\rceil + k)$.

עתה נחסום את מספר האינדכסים $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus T$ שעבורם $f(i)$ שונה מ־$f'(i)$: אלו יכולים לכלול את האינדכסים ה"רעים" מהשלב השני של האלגוריתם, שמספרם חסום ע"י $\frac{\epsilon}{4}n$, ו/או אינדכסים שעבורם $f(\lfloor\frac{i}{k}\rfloor k - k) \ne f'(\lfloor\frac{i}{k}\rfloor k - k)$ או $f(\lceil\frac{i}{k}\rceil + k) \ne f'(\lceil\frac{i}{k}\rceil + k)$. בשל החסם על מספר ההבדלים מעל T, המספר של אלו חסום ע"י $\frac{2\epsilon}{4}n$. יחד עם האינדכסים על T עצמה שבהם f נבדלת מ־f', סה"כ מספר ההבדלים בין f ל־f' בכל $\{1, \ldots, n\}$ חסום ע"י ϵn.

לבסוף נראה ש־f' היא $10k$־בערך־מונוטונית: אם $1 \le i < i + 10k \le j \le n$, נראה שמתקיים $f(i) \le f(j)$. לשם כך נסתכל על $l = \lfloor\frac{i+j}{2k}\rfloor k$. מתקיים $l \in T$, וכן מתקיים $\lceil\frac{i}{k}\rceil + k \le l \le \lfloor\frac{j}{k}\rfloor k - k$. על כן, לפי הבניה שלנו, מתקיים $f'(i) \le f'(\lceil\frac{i}{k}\rceil + k) \le f'(l) \le f'(\lfloor\frac{j}{k}\rfloor k - k) \le f'(j)$.

לומדים במסלול המהיר

לשם נוחות נראה אלגוריתם שבהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ פולט גרף שהוא 6ϵ־קרוב להיות איזומורפי ל־G. אם רוצים גרף ϵ־קרוב, פשוט מפעילים את האלגוריתם על $\epsilon' = \epsilon/6$.

כהכנה לאלגוריתם, ראשית נשים לב שכל הגרף עם דרגה מקסימלית 2 מורכב מאיחוד זר של רכיבי קשירות, שכל אחד מהם יכול להיות צומת בודד, מסלול או מעגל.

עתה נראה, עבור $k = \lceil 1/\epsilon \rceil$, שגרף עם דרגה מקסימלית של $d = 2$ הוא ϵ־קרוב לגרף שבו כל הרכיבים הנ"ל הם מגודל חסום ע"י k, למעט אולי רכיב בודד שהוא מסלול על כל הצמתים הנותרים. על מנת להפוך גרף אחר לגרף בעל הצורה הזו, נסמן ב־l את מספר הרכיבים שיש להם יותר מ־k צמתים כ"א, ונבצע את השינויים הבאים.

- לכל רכיב בעל יותר מ־k צמתים שהוא מעגל, נסיר קשת בודדת ממנו. עתה נשארו לנו רק רכיבים כאלה שהם מסלולים (כי יש בהם יותר מצומת בודד).
- ניקח את כל l הרכיבים הנ"ל, נסדר אותם באופן שרירותי $L_1, \ldots, L_l$, ונסמן את צמתי הקצה של המסלול L_i ב־u_i, v_i. נהפוך אותם למסלול אחד גדול ע"י כך שלכל $1 \le i < l$ נחבר את v_i ל־u_{i+1}.

סה"כ בצענו פחות מ־$2l$ שינויים. מכיוון שמתקיים $lk < n$ (כי רכיבי הקשירות הם זרים), מספר השינויים הכולל קטן מ־$2n/k \le \epsilon dn$.

נסמן את הגרף אחרי השינויים ב־G', ועתה ננסה ללמוד אותו. הפלט יהיה גם גרף שבו יש לכל היותר רכיב אחד עם יותר מ־k צמתים. הלמידה תהיה עם מספר שאילתות פולינומי ב־$1/\epsilon$, ותעבוד תחת ההנחה ש־n הוא גדול מספיק (גם פולינומי ב־$1/\epsilon$, כך שזה לא מפר את ההבטחה על מספר השאילתות לכל n).

עתה לכל $3 \le i \le k$ נסמן ב־c_i את מספר רכיבי הקשירות שהם מעגלים מגודל i, ולכל $1 \le i \le k$ נסמן ב־l_i את מספר הרכיבים שהם מסלולים מגודל i (כאשר l_1 הוא מספר הצמתים הבודדים). עתה נשים לב שאם נבחר צומת מקרי באופן אקראי, אז ההסתברות שהוא נמצא במעגל מגודל i היא בדיוק $i \cdot c_i/n$. מספר השאילתות לברר האם זהו אכן צומת כזה הוא $O(k)$ (עושים חיפוש לעומק עד שמוצאים רכיב מגודל חסום ע"י k שאותו בודקים, או לחילופין עד שמגלים $k+1$ צמתים ברכיב ואז הוא בוודאי לא מעגל מגודל i).

על כן, באמצעות דגימת $\tilde{O}(1/\epsilon^4)$ צמתים וביצוע $\tilde{O}(1/\epsilon^5)$ שאילתות, אפשר למצוא η כך שמתקיים $i \cdot c_i/n - i\epsilon/k \le \eta \le i \cdot c_i/n + i\epsilon/k$, עם הסתברות טעות חסומה ע"י $1/6k$. אם נניח ש־n גדול מ־$k/\epsilon = O(1/\epsilon^2)$, אז קיים מספר שלם $\hat{c}_i$ שעבורו מתקיים $\eta - 2i\epsilon/k \le i \cdot \hat{c}_i/n \le \eta - i\epsilon/k$ ובפרט יתקיים $c_i - 3\epsilon n/k \le \hat{c}_i \le c_i$. החלק של $\hat{c}_i \le c_i$ חשוב כי אנחנו צריכים בסוף לפלוט גרף בעל n צמתים בדיוק, אז אסור שהקירובים יהיו גדולים מהמספרים האמיתיים.

באופן דומה אפשר למצוא $\hat{l}_i$ עבור $1 \le i \le k$ שמקיימים $l_i - 3\epsilon n/k \le \hat{l}_i \le l_i$. איחוד מאורעות ייתן לנו שההסתברות לטעות כל שהיא בקירובים שלנו חסומה ע"י $\frac{1}{3}$. מספר השאילתות הכולל הוא $\tilde{O}(1/\epsilon^6)$, אבל אתם מוזמנים אח"כ לחשוב איך אפשר להוריד את החזקה (אפשרות אחת היא "למחזר" את הדגימה של הצמתים עבור כל ה־c_i וה־l_i, ואפשר לחסוך עוד אם מגדירים מרחב הסתברות שקשור ברכיבי הגרף ומקרבים אותו ישירות).

הגרף $\hat{G}$ שנפלוט יהיה זה שמכיל $\hat{c}_i$ מעגלים מגודל i לכל $3 \le i \le k$ ו־$\hat{l}_i$ מסלולים מגודל i לכל $1 \le i \le k$, כאשר שאר הצמתים יהיו במסלול בודד (לא נורא אם יש פחות מ־k צמתים כאלה, עדיין שמים אותם במסלול). אם הבניה המתקבלת היא בעלת יותר מ־n צמתים סה"כ אז זה ממילא אומר שהיתה טעות בקירובים שלנו (המאורע שקורה בהסתברות נמוכה), ואז לא משנה איזה גרף נפלוט.

נראה שהגרף $\hat{G}$ קרוב להיות איזומורפי ל־G': על מנת להפוך אותו לגרף איזומורפי ל־G', לכל $1 \le i \le k$ אנחנו $l_i - \hat{l}_i$ פעמים ננתק מסלול מאורך i מהמסלול שבנינו מעל הצמתים שלא הכנסנו במקור לרכיבים הקטנים (סה"כ $l_i - \hat{l}_i$ שינויים), ולכל $3 \le i \le k$ אנחנו $c_i - \hat{c}_i$ פעמים ננתק מסלול מאורך i ו"נסגור" אותו למעגל (סה"כ $2(c_i - \hat{c}_i)$ שינויים). הצמתים במסלול שאנחנו מנתקים ממנו לא יגמרו לנו עד סוף התהליך, כי מתקיים $\sum_{i=1}^{k} il_i + \sum_{i=3}^{k} ic_i \le n$ (כזכור המספרים האלו מקורם בגרף בעל n צמתים).

אם לא היתה טעות בקירובים, אז מספר השינויים הכולל חסום ע"י $\sum_{i=1}^{k}(l_i - \hat{l}_i) + 2\sum_{i=3}^{k}(c_i - \hat{c}_i) \le 9\epsilon n$. בהתחשב בכך ש־$G'$ התקבל מ־G ע"י לא יותר מ־$2\epsilon n$ שינויים, קיבלנו חסם מרחק כולל של $11\epsilon n$, ז"א ש־$\hat{G}$ הוא 6ϵ־קרוב להיות איזומורפי ל־G.

גלגל אותה

ההוכחה מאוד דומה לזו עבור התכונה של שרשור שני פלינדרומים. אנחנו נכתוב שתי התפלגויות, ונראה שהן מקיימות את התנאים עבור חסם תחתון על $\frac{1}{5}$־בדיקה.

- עבור ההתפלגות τ, ראשית נבחר באופן יוניפורמי מספר $1 \leq k \leq n$, ואז נבחר מחרוזת u מאורך k באופן מקרי ויוניפורמי (כל אות במחרוזת נבחרת מ־$\{0,1\}$ באופן יוניפורמי וב"ת באחרות), ומחרוזת v מאורך $n-k$ באופן מקרי ויוניפורמי. נקבע $w = uv$ ו־$w' = vu$.
- עבור ההתפלגות ν, פשוט נבחר את w ואת w' באופן מקרי ויוניפורמי.

ברור שההתפלגות τ היא מעל קלטים שמקיימים את התכונה. עבור הניתוח של ν, נראה שגם עבור מחרוזת קבועה w (אפילו אם היא שרירותית ולא מקרית), מחרוזת מקרית w' תהיה $\frac{2}{5}$־רחוקה מלהיות גלגול של w בהסתברות $1-o(1)$ (זה אומר שהמרחק של הקלט מהתכונה הוא לפחות $\frac{1}{5}$, כי אורכו הוא $2n$ ולא n).

עבור ההוכחה, נשים לב שלמחרוזת w יש n גלגולים אפשריים לכל היותר (יש מחרוזות עם פחות גלגולים שונים זה מזה, למשל המחרוזת שכולה 1). מספר המקומות שבהם מחרוזת מקרית נבדלת מגלגול נתון של w הוא סכום של n משתנים מקריים ב"ת שנבחרים יוניפורמית מ־$\{0,1\}$, ולכן מחסימת סטיות גדולות הסיכוי שיהיו פחות מ־$\frac{2}{5}n$ הבדלים חסום ע"י $e^{-n/50}$. לכן הסיכוי שמחרוזת מקרית תהיה עם פחות מ־$\frac{2}{5}n$ הבדלים מגלגול כל שהוא של w חסום ע"י $ne^{-n/50} = o(1)$, כנדרש.

על מנת להוכיח שההתפלגויות מקיימות את התנאי נגד אלגוריתמים אדפטיביים, נניח ש־Q היא תת־קבוצה של $\{1,\ldots,2n\}$ מגודל קטן מ־$\sqrt{n}$ (כאשר רואים את זוג המחרוזות כפונקציה $f:\{1,\ldots,2n\} \to \{0,1\}$), נניח ש־$h$ היא פונקציה מ־Q ל־$\{0,1\}$, וננתח את $\Pr[f|_Q = h]$. עבור ν ברור שמתקיים $\Pr_\nu[f|_Q = h] = 2^{-|Q|}$, כי ההתפלגות $\nu|_Q$ היא יוניפורמית מעל קבוצת כל הפונקציות מ־Q ל־$\{0,1\}$ (נזכיר כי הסימון $\nu|_Q$ מתאר את התהליך של בחירת f לפי ν וביצוע הצמצום $f|_Q$).

עבור הניתוח של $\tau|_Q$ ננתח זוג אינדכסים $1 \leq i \leq n < j \leq 2n$. נגיד שהם מתואמים אם k הוא $j-i$ או $j-i-n$ (רק אחת משתי האפשרויות היא בתחום הבחירה של k). זוג אינדכסים ששניהם בתחום $\{1,\ldots,n\}$ או שניהם ב־$\{n+1,\ldots,2n\}$ תמיד יחשבו כלא־מתואמים.

הדבר לשים לב הוא שאם במהלך ההגרלה לפי τ בחרנו k שעבורו אין ב־Q זוג אינדכסים מתואמים, אז (בהתניה על בחירה זו של k) גם $\tau|_Q$ יתפלג באופן יוניפורמי מעל $\{0,1\}^{|Q|}$ אם נסמן ב־B את המאורע שיש ב־Q זוג מתואם כל שהוא עבור ה־k נבחר, זה אומר שמתקיים $\Pr_\tau[f|_Q = h \mid \neg B] = 2^{-|Q|}$. עבור זוג אינדכסים $1 \leq i \leq n < j \leq 2n$ ספציפי, ההסתברות שהם יהיו מתואמים היא $\frac{1}{n}$. כמו כן, לא יכולים להיות ב־Q יותר מ־$\frac{1}{4}|Q|^2$ זוגות שיכולים להיות מתואמים, ולכן ההסתברות שיש זוג מתואם כל שהוא חסומה ע"י $\frac{1}{4}$. מכאן שמתקיים (עבור ההתפלגות הלא־מותנה) $\Pr_\tau[\neg B] \geq \frac{3}{4}$, ולכן $\Pr_\tau[f|_Q = h] \geq \Pr_\tau[f|_Q = h \mid \neg B] \cdot \Pr_\tau[\neg B] \geq \frac{3}{4}2^{-|Q|}$. בזאת השלמנו את ההוכחה שההתפלגויות τ ו־ν מקיימות את הדרוש לפי שיטת יאו לקבלת החסם על מספר השאילתות הדרוש עבור $\frac{1}{5}$־בדיקה.

ריקוד לשניים

נסמן ע"י μ_1 את ההטלה של ההתפלגות μ על הקורדינטה הראשונה (בוחרים זוג (i,j) לפי μ ואז לוקחים רק את i), וב־μ_2 את ההטלה של μ על הקורדינטה השניה. נתאר אלגוריתם בדיקה בעל $\tilde{O}(n)$ דגימות (עם מקדמים שתלויים פולינומית ב־ϵ) שיקבל בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ אם אכן מתקיים $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, וידחה בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ אם μ היא 18ϵ־רחוקה מ־$\mu_1 \times \mu_2$. אם μ היא 18ϵ־רחוקה מהתפלגות ב"ת כל שהיא, אז היא בפרט רחוקה מההתפלגות הב"ת $\mu_1 \times \mu_2$. עבור ϵ בדיקה, אפשר פשוט להפעיל את האלגוריתם עם $\epsilon' = \epsilon/18$. אנחנו גם נניח בהמשך שמתקיים $\epsilon < 1/18$, אחרת הטענה כאן היא טריביאלית.

אנחנו נבנה קירוב $\tilde{\mu}_1$ באמצעות t דגימות של μ_1, כאשר $\tilde{\mu}_1(i)$ יסמן את מספר הפעמים שקיבלנו i, מחולק ב־t (עבור דגימה של μ_1 פשוט לוקחים דגימה של μ ומתעלמים מהקורדינטה השניה). עבור

$t = O(n\log(n)/\epsilon^3) = \tilde{O}(n)$ דגימות, בהסתברות לפחות $\frac{8}{9}$ יתקיים $\tilde{\mu}_1(i) \le (1+\epsilon)\mu_1(i)$ לכל $1 \le i \le n$ וכן יתקיים $(1-\epsilon)\mu(i) \le \tilde{\mu}_1(i)$ לכל i שעבורו $\mu_1(i) \ge \epsilon/(1+\epsilon)n$. בהדרכה של השאלה היה כתוב שלא צריך להוכיח את זה – הוכחה כזו היא אפשרית באמצעות הפעלת חסמי סטיות גדולות כפליים לכל i לחוד, שלאחריהם מבצעים איחוד מאורעות לקבלת חסם בהסתברות גבוהה על כל ה־i יחדיו. באופן דומה נבנה קירוב $\tilde{\mu}_2$ באמצעות t דגימות שעבורו בהסתברות לפחות $\frac{8}{9}$ יתקיים $\tilde{\mu}_2(i) \le (1+\epsilon)\mu_2(i)$ לכל $1 \le i \le n$ וכן יתקיים $(1-\epsilon)\mu(i) \le \tilde{\mu}_2(i)$ לכל i שעבורו $\mu_2(i) \ge \epsilon/(1+\epsilon)n$. אם לא היתה טעות בבניית $\tilde{\mu}_1$ (המאורע בהסתברות נמוכה) אז מתקיים $d(\tilde{\mu}_1,\mu_1) = \sum_{i:\mu_1(i)<\tilde{\mu}_1(i)}(\tilde{\mu}_1(i)-\mu_1(i)) \le \epsilon\sum_{i:\mu_1(i)<\tilde{\mu}_1(i)}\mu_1(i) \le \epsilon$ (שימו לב לשימוש כאן בביטוי האלטרנטיבי למרחק בין התפלגויות). בדומה, אם לא היתה טעות בבניית $\tilde{\mu}_2$ אז מתקיים $d(\tilde{\mu}_2,\mu_2) \le \epsilon$.

עתה נרצה להתייחס ל־$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 \times \tilde{\mu}_2$ כאל התפלגות נתונה, ולבצע בדיקה של μ מולה, כאשר אנחנו מגדילים את ההסתברות לתשובה נכונה ל־$\frac{8}{9}$ (במקום $\frac{2}{3}$). נשים לב שאם לא היו טעויות בבניית $\tilde{\mu}_1$ ו־$\tilde{\mu}_2$, אז $d(\tilde{\mu}_1\times\tilde{\mu}_2,\mu_1\times\mu_2) \le d(\tilde{\mu}_1\times\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_1\times\mu_2) + d(\tilde{\mu}_1\times\mu_2,\mu_1\times\mu_2) = d(\tilde{\mu}_1,\mu_1) + d(\tilde{\mu}_2,\mu_2) \le 2\epsilon$. בשביל שהבדיקה הזו תעבוד נכניס בה מספר שינויים (הבעיה העיקרית היא לדאוג לקבל את הקלט במקרה ש־μ היא ב"ת, כי המרחק הקטן בין μ ל־$\tilde{\mu}$ לא מספיק לכשעצמו להבטיח את הקבלה).

אנחנו נבצע, בדיוק כמו בחוברת הקורס, חלוקה לדליים של ההתפלגות $\tilde{\mu}$. צריך אבל להיזהר בקשר לדלי הכי קטן S_0: עליו להכיל לא רק את האיברים שעבורם $\tilde{\mu}(i,j) \le \epsilon/n^2$ (שימו לב ש־n^2 הוא גודל מרחב ההסתברות שלנו), אלא את כל האיברים (i,j) שעבורם $\tilde{\mu}_1(i) \le \epsilon/n$ ו/או $\tilde{\mu}_2(j) \le \epsilon/n$ (זאת מכיוון שאלו האיברים שעבורם אין לנו קירוב כפלי). את שאר האיברים נחלק לדליים באופן הצפוי: $S_j = \{a \in S : \epsilon(1+\epsilon)^{j-1}/n^2 \le \tilde{\mu}(a) < \epsilon(1+\epsilon)^j/n^2\} \setminus S_0$. את החלוקה הכוללת נסמן ב־$\mathcal{B} = \langle S_0,\ldots,S_r\rangle$.

אם מיקמנו את (i,j) ו־(k,l) באותו דלי (לא היו טעויות בבניית $\tilde{\mu}_1$ ו־$\tilde{\mu}_2$), כל עוד זה אינו הדלי S_0, אם אכן $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, אז מכך שמתקיים $\tilde{\mu}(i,j) \le (1+\epsilon)\tilde{\mu}(k,l)$, נוכל לקבל שהצמצום של μ לאותו דלי יהיה 6ϵ־יוניפורמי:

$$\mu(i)\cdot\mu(j) \le \frac{1}{(1-\epsilon)^2}\tilde{\mu}_1(i)\cdot\tilde{\mu}_2(j) \le \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)^2}\tilde{\mu}_1(k)\cdot\tilde{\mu}_2(l) \le \frac{(1+\epsilon)^3}{(1-\epsilon)^2}\mu(k)\cdot\mu(l) \le (1+6\epsilon)\mu(k)\cdot\mu(l)$$

בהתאם לכך נבצע 6ϵ־בדיקה ליוניפורמיות בתוך כל דלי שנקבל מספיק דגימות ממנו. את התנאי לדחיה של הקלט לפי מספר האיברים שנופלים בכל דלי גם נעדכן. ראשית נשים לב שאין לנו שום חסם תחתון על $\mu(S_0)$, ולכן נתמקד רק בשאר הדליים $S_1,\ldots,S_r$, ונבדוק שלא נפלו בהם פחות מדי או יותר מדי דגימות. עבור אלו אנחנו יודעים שמתקיים $(1-3\epsilon)\tilde{\mu}(S_j) \le \mu(S_j) \le (1+3\epsilon)\tilde{\mu}(S_j)$, בגלל שלכל $i \in S_j$ מתקיים $(1-\epsilon)^2\tilde{\mu}(i) \le \mu(i) \le (1+\epsilon)^2\tilde{\mu}(i)$. את התנאי לדחיה של הקלט נעדכן בהתאם, ונדחה אם מתקיים $|Q_j|/q < (1-3\epsilon)\tilde{\mu}(S_j) - \epsilon/r$ או $|Q_j|/q > (1+3\epsilon)\tilde{\mu}(S_j) + \epsilon/r$ עבור $1 \le j \le r$. את מספר הדגימות הכולל $|Q|$ נחשב לפי מרווח הערכה של ϵ/r. תנאי המעבר הזה לפי ערכי $\tilde{\mu}(S_j)$ לא יכול לקבל בהסתברות גבוהה, אלא אם כן מתקיים $d(\mu_{\mathcal{B}},\tilde{\mu}_{\mathcal{B}}) \le \tilde{\mu}(S_0) + \sum_{j=1}^r |\mu(S_j) - \tilde{\mu}(S_j)| \le 2\epsilon + 3\epsilon\sum_{j=1}^r \tilde{\mu}(S_j) + 2r\epsilon/r \le 7\epsilon$.

לכן, אם הבדיקה הכוללת מול $\tilde{\mu}$ קיבלה בהסתברות גבוהה (גם התנאים של הדליים הבודדים וגם זה של $\tilde{\mu}_{\mathcal{B}}$) אז $d(\mu,\tilde{\mu}) = d(\mu_{\mathcal{B}},\tilde{\mu}_{\mathcal{B}}) + \sum_{j=0}^r d(\mu|_{S_j},\tilde{\mu}|_{S_j})\cdot\tilde{\mu}(S_j) \le 7\epsilon + \tilde{\mu}(S_0) + 7\epsilon\sum_{j=1}^r \tilde{\mu}(S_j) \le 16\epsilon$.

בצענו שלושה אלגוריתמים שכל אחד מהם נותן תשובה נכונה בהסתברות לפחות $\frac{8}{9}$, אז בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ כל השלושה נתנו תשובות נכונות. ננתח את המצב תחת ההנחה שזה קרה.

אם אכן מתקיים $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, אז לפי החישובים למעלה, ההתפלגות $\tilde{\mu}$ תקיים את הדרוש בשביל שהבדיקה מולה תקבל את μ. מצד שני, אם μ היא 18ϵ־רחוקה מ־$\mu_1 \times \mu_2$, אז היא תהיה בהכרח 16ϵ־רחוקה מ־$\tilde{\mu}$, ולכן הבדיקה האחרונה בהכרח תדחה אותה.