תרגיל ראשון   הגשה: 17.11.2020

קו המשווה (6 נקודות)

נניח ש־μ ו־ν מרחבי הסתברות מעל $\{1,\dots,n\}$, ו־E מאורע בעל הסתברות חיובית ב־μ ו־ν כך ששתי ההתפלגויות המותנות על E שוות, ז"א לכל i מתקיים $\Pr_\mu[i|E]=\Pr_\nu[i|E]$. הראו שהמרחק $d(\mu,\nu)$ חסום מלמעלה ע"י $\max\{\Pr_\mu[\neg E],\Pr_\nu[\neg E]\}$.

פגיעות במרחב (8 נקודות)

נבחר תת־קבוצה A של המרחב הלינארי $(\mathbb{Z}_2)^n$, המרחב ממימד n מעל השדה הסופי בעל שני האיברים, בצורה הבאה: כל וקטור $v\in(\mathbb{Z}_2)^n$ ייבחר להיות איבר ב־A בהסתברות $2n/2^n$, באופן ב"ת בבחירות עבור כל הווקטורים האחרים. הראו שבהסתברות $1-o(1)$ הקבוצה A פורשת את כל המרחב.

הסבר לסימון: צריך להוכיח שלכל $\epsilon>0$ קיים $N(\epsilon)$, כך שאם $n>N(\epsilon)$, אז ההסתברות לפרישת כל המרחב היא לפחות $1-\epsilon$ (מותר אבל להשתמש בסימוני "o" כל עוד המתמטיקה שלכם נכונה).

רמז: חישבו מה לא יכול להיות ב־A במידה והקבוצה פורשת תת־מרחב שאינו המרחב כולו.

קליקים באקראי (8 נקודות)

נתון $0<\alpha\le 1$. הראו שקיים C (תלוי ב־α), כך שגרף שנבחר לפי המרחב $G(n,\alpha)$ יכיל קליק (תת־גרף מלא) בעל לפחות $C\log(n)$ צמתים בהסתברות $1-o(1)$.

רמז: כדאי לחשוב על קבוצות בנות $k<C\log n$ צמתים, ומהו הסיכוי שיש צומת אחר בגרף מחובר לכל צמתי הקבוצה.

הערה: תוצאות יותר חזקות (למשל עם חישוב עבור הערך של C) קיימות בספרות. כמובן שאם אתם משתמשים בתוצאה יותר חזקה כזו, עליכם להוכיח אותה (אבל יותר פשוט להוכיח את השאלה לפי הרמז).

תרגיל שני הגשה: 22.12.2020

נצחון יצוגי (6 נקודות)

תחרות $T = (V, E)$ היא גרף מכוון, כך שכל זוג צמתים $u \neq v$ מקיים או $uv \in E$ או $vu \in E$, אבל לא את שניהם (בין כל זוג צמתים יש קשת מה"מנצח" ל"מפסיד" – שימו לב אבל שאין דרישה לחוסר מעגלים!). לצורך השאלה נסמן עבור $v \in V$ את דרגת היציאה שלו (מספר הקשתות המכוונות שהוא הצומת ה"מנצח" בהן) ב־$d_T^{\rightarrow}(v)$ (מותר להשמיט את האינדקס T כאשר ברור על איזו תחרות אנחנו מדברים).

הראו שאם לכל $v \in V$ מתקיים $d_T^{\rightarrow}(v) \geq 10$ (כל דרגות היציאה הן לפחות 10), אז קיימת צביעה $c : V \to \{1, 2\}$ של הצמתים בשני צבעים, כך שלכל צומת יש קשתות יוצאות לצמתים משני הצבעים (לכל $v \in V$ קיימים u, w כך ש־$c(u) = 1$, $c(w) = 2$, ו־$vu, vw \in E$).

הדרכה: כדאי לסדר את הצמתים $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ כך שמתקיים $d_T^{\rightarrow}(v_1) \leq d_T^{\rightarrow}(v_2) \leq \cdots \leq d_T^{\rightarrow}(v_n)$. אם לכל k חוסמים מלמעלה את מספר הצמתים שדרגת היציאה שלהם אינה גדולה מ־k, אז ניתן גם לחסום מלמטה את הערך של $d_T^{\rightarrow}(v_i)$ לכל $1 \leq i \leq n$.

ממוצע מקוצר של פולינום (6 נקודות)

נניח ש־$p(x_1, \ldots, x_n)$ הוא פולינום עם n משתנים מעל $\mathbb{R}$, שדרגתו חסומה ע"י d (נזכיר שדרגת ה"מונום" $x_{i_1}^{d_1} x_{i_2}^{d_2} \cdots x_{i_k}^{d_k}$ היא $\sum_{j=1}^{k} d_j$, ודרגת הפולינום היא הדרגה המירבית של איברי הסכום). עבור מספר טבעי k, נסמן ב־μ מרחב התפלגות שקובע את הערכים של סדרת משתנים מקריים $X_1, \ldots, X_n$, כך שאלו יהיו n משתנים ב"ת לחלוטין שכל אחד מהם מתפלג יוניפורמית מעל $\{0, \ldots, k-1\}$. נניח עתה ש־ν היא התפלגות אחרת, שתחתיה מתקיים שכל X_i מתפלג יוניפורמית מעל $\{0, \ldots, k-1\}$, ושכל קבוצה בת לכל היותר d מ"מ מתוך $X_1, \ldots, X_n$ היא ב"ת (למשל, ν המתאימה למרחב מדגם מוגבל מתאים). הראו שמתקיים $\mathrm{E}_\mu[p(X_1, \ldots, X_n)] = \mathrm{E}_\nu[p(X_1, \ldots, X_n)]$.

זיווגים מתחמקים (9 נקודות)

נתון גרף (לא מכוון) G עם קבוצת צמתים V וקבוצת קשתות E, ונתונה גם תת־קבוצה $F \subseteq E$ של קשתות "אדומות". הראו איך בונים אלגוריתם ב־RNC (ראו את האלגוריתם לזיווגים מושלמים שמשתמש בלמת הבידוד מתוך חוברת ההרצאות), אשר במידה ויש זיווגים מושלמים בגרף, יחזיר את המספר המינימלי של קשתות אדומות שחייבים להכליל בזיווג מושלם כל שהוא.

יותר במדויק: האלגוריתם יפלוט מספר טבעי או "אין זיווג". בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ האלגוריתם יפלוט את המספר הנכון. בכל מקרה האלגוריתם לעולם לא יפלוט מספר שהוא קטן יותר מהמספר הנכון (השגיאה היא חד־כיוונית במובן זה שיכול להיות רק שהאלגוריתם יפלוט "אין זיווג" או מספר גבוה מדי).

הערה: עבור חלקים מההוכחה שהם כמעט זהים למה שנעשה בחוברת ההרצאות, מותר לציין זאת במקום לכתוב את כל ההוכחה מחדש.

קליקים באקראי

ניתן להגיש את פתרון השאלה הזו כאן, אם לא הגשתם אותה עם התרגיל הראשון.

תרגיל שלישי הגשה: 19.1.2021

כולם שונים (6 נקודות)

עבור המספרים $p > n > 10m^2$, כאשר m ו־n מספרים טבעיים ו־p מספר ראשוני, נגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{Z}_p \to \{0,\ldots,n-1\}$ בצורה הבאה: עבור $a \in \mathbb{Z}_p$, נסמן ב־$\hat{a} \in \mathbb{Z}$ את המספר בין 0 ל־$p-1$ שמתאים ל־a. במילים אחרות, $\hat{a} = x$ אם $a = \bar{x}$. נגדיר את $f(a)$ להיות השארית של החלוקה של $\hat{a}$ ב־n.

הראו שלכל קבוצה $A \subset \mathbb{Z}_p$ בת m איברים קיים $d \in \mathbb{Z}_p$, כך שהקבוצה $\{f(da) : a \in A\}$ היא גם בת m איברים. במילים אחרות, לכל האיברים של $dA = \{da : a \in A\}$ יש ערכי f שונים זה מזה.

פרישה נרחבת (9 נקודות)

הראו שקיים קבוע $c > 0$ עם התכונה הבאה: לכל מספר ראשוני p, כל $k > 0$, וכל תת־קבוצה A של השדה $\mathbb{Z}_p$ (שדה השלמים מודולו p) המקיימת $|A| = k$, קיים איבר $x \in \mathbb{Z}_p$ (שונה מ־0) כך שהקבוצה $x \cdot A = \{xa : a \in A\}$ מכילה איבר מכל מקטע ב־$\mathbb{Z}_p$ שגודלו הוא לפחות $cp/\sqrt{k}$. מקטע מאורך l הוא קבוצה מהצורה $I_{r,l} = \{r,\ldots,r+l-1\}$ עבור $r \in \mathbb{Z}_p$, והחשבון הוא ב־$\mathbb{Z}_p$, כך שלמשל הקבוצה $I_{-\lfloor l/2\rfloor,l} = \{p-\lfloor l/2\rfloor,\ldots,p-1,0,\ldots,\lceil l/2\rceil-1\}$ היא דוגמה לקטע כזה.

רמזים: נסו להראות קודם שקיימים x ו־y כך שהקבוצה $x \cdot A + y = \{xa + y : a \in A\}$ מקיימת את התכונה הנ"ל. כמו כן, נסו לצמצם את מספר הקטעים שצריך להראות שייכות אליהם.

קירוב להסתברות (6 נקודות)

צריכים לקרב התפלגות לא ידועה μ מעל $\{1,\ldots,n\}$. חשבו על הדרך הבאה: לוקחים q דגימות ב"ת $i_1,\ldots,i_q$ כך שכל i_j מוגרל לפי ההתפלגות μ באופן ב"ת בדגימות האחרות. נגדיר את ההתפלגות ν לפי הנוסחה $\Pr_\nu[i] = |\{j : i_j = i\}|/q$, ז"א נקרב את ההסתברות ל־i לפי מספר הפעמים היחסי שתוצאה זו הופיעה ב־q הדגימות שלקחנו. הראו שלכל ϵ קיים C, כך שאפשר בצורה זו עם $q = Cn$ דגימות לוודא שמתקיים $\mathrm{dist}(\mu,\nu) \le \epsilon$ בהסתברות $1 - o(1)$.

הערה: המדובר במרחק ה־variation distance, וכדאי לבדוק את השאלות בנידון בחוברת התרגילים הפתורים.

תרגיל רביעי   הגשה: 2.3.2021

סוגריים מקולקלים (6 נקודות)

מגרילים מחרוזת באורך $2n$ שמורכבת מהסימנים "(" ו־")" באופן יוניפורמי (כל אות באופן ב"ת באחרות). הראו שבהסתברות $1-o(1)$, אפשר יהיה לתקן את המחרוזת, ע"י החלפת הסימן בלא יותר מ־$c\sqrt{n\log n}$ מקומות במחרוזת (כאשר c קבוע גלובלי שאינו תלוי ב־n) ולהפוך אותה לביטוי־סוגריים חוקי (תזכורת קצרה: המילה הריקה היא ביטוי חוקי, אם w הוא ביטוי חוקי אז גם (w) הוא ביטוי חוקי, ואם v,w הם ביטויים חוקיים אז גם השרשור vw חוקי).

הערה עם רמז: מותר להשתמש בתכונות של מספרי קטלן (Catalan) מבלי להוכיח אותן.

מיון לא ראוי (12 נקודות)

הדרכה: שאלה זו מתבססת על חומר מהפרק על הילוכים מקריים, ובעיקר תת־הפרק על רשתות חשמליות. מומלץ ראשית לקרוא אותו (מן הסתם יהיו גם שיטות אחרות לפתור את השאלה, אבל שיטה זו עובדת היטב). מותר להשתמש בטענות שמופיעות בחוברת גם אם הן לא מוכחות שם.

נתון מערך $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ שמכיל פרמוטציה של $\{1,\ldots,n\}$ (ז"א שכל $1\le j\le n$ מופיע בדיוק פעם אחת), ואנחנו רוצים להביא אותו לצורה הממויינת $(1,\ldots,n)$. בכל שלב, אם המערך עדיין לא ממוין, נבחר $1\le i<j\le n$ באופן יוניפורמי מבין $\binom{n}{2}$ האפשרויות ונחליף בין ערך σ_i וערך σ_j.

- הראו, לכל ערך התחלתי אפשרי של $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, שתוחלת מספר הצעדים עד שבסוף הגענו למערך הממוין היא לכל היותר $(n+O(1))!$.

הדרכה נוספת לסעיף: אפשר להשתמש בחסם עליון לא מסובך על ההתנגדות השקולה של הרשת החשמלית המתאימה להילוך המקרי המתאים.

- הראו שאם הערך ההתחלתי של $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ אינו ממוין, אז תוחלת מספר הצעדים היא לפחות $(n-O(1))!$.

הדרכה נוספת לסעיף: אפשר לפתור את הסעיף בלי להוכיח חסם תחתון להתנגדות השקולה. מספיק להראות את הטענה במקרה שבו הערך ההתחלתי נבדל מ־$(1,\ldots,n)$ בחילוף בודד (אפילו לא צריך להסביר מדוע זה מספיק). במקרה כזה התוחלת זהה ללא תלות בזהות החילוף הבודד שבוצע (למשל אם החליפו את 1 ו־2, או שהחליפו את 1 ו־n; גם טענה זו אינכם צריכים להסביר).

צלילה לתוך עץ (6 נקודות)

נתון לנו עץ מכוון T (עם שורש) שיש לו n עלים. אין נתונים אחרים על העץ (למשל, העץ לא חייב להיות מאוזן, ויכול להיות בצורת "מסרק" או אפילו מסלול בודד). נריץ אלגוריתם שבשלב הראשון מתחיל מהשורש, ובכל שלב עובר מהצומת הנוכחי אל אחד הבנים שלו שנבחר באופן יוניפורמי מהאפשרויות. כשהאלגוריתם מגיע לעלה הוא עוצר. עבור $d\ge 2$ נסמן ב־Z_d את המ"מ שערכו שווה למספר הצמתים בעלי לפחות d בנים שהאלגוריתם ביקר בהם עד שהגיע לעלה. הראו שמתקיים $\mathrm{E}[Z_d]\le\log(n)/\log(d)$.