פתרון לתרגיל הראשון

לא משנה עם או בלי

נשתמש בתוצאת השאלה "התפלגויות מותנות" מתוך לקט התרגילים של "שיטות הסתברותיות ואלגוריתמים", רק שכאן במקום משתנים מקריים מספריים יהיו לנו פונקציות מקריות f ו־g. תוצאת התרגיל ההוא לא תלויה ב"סוג הערך" של המשתנים המקריים, הם יכולים להיות פונקציות. ההתפלגות תהיה לפי התהליך הבא:

- מגרילים את f לפי ν.
- אם f היא חח"ע אז קובעים את g להיות זהה ל־f. אחרת מגרילים באופן ב"ת בהגרלה הקודמת את g להיות פונקציה חח"ע מקרית יוניפורמית (ז"א שמגרילים אותה לפי τ).

המאורע E יוגדר להיות המאורע ש־f היא חח"ע. נשים לב שההתפלגות של g כשמתנים אותה על E היא יוניפורמית מעל כל הפונקציות החח"ע (ז"א זהה ל־τ), וגם התפלגות של g מותנה על $\neg E$ זהה ל־τ. על כן זוהי ההתפלגות הלא־מותנה של g. ברור גם שההתפלגות הלא־מותנה של f היא ν, וכן שמתקיים $\Pr[f=g|E]=1$. כל שנותר הוא לחסום את $\Pr[\neg E]$.

לכל $1\leq i<j\leq k$, נגדיר ב־B_{ij} את המאורע $f(i)=f(j)$. המאורע $\neg E$ הוא איחוד כל המאורעות B_{ij}. על כן לפי חסם איחוד מאורעות מתקיים $\Pr[\neg E]\leq\sum_{1\leq i<j\leq k}\Pr[B_{ij}]=\binom{k}{2}\cdot n^{-1}<n^{2/3}\cdot n^{-1}=o(1)$.

כן משנה עם או בלי

לפי תוצאת סעיף א של השאלה "קרבה בין התפלגויות" מתוך לקט התרגילים של "שיטות הסתברותיות ואלגוריתמים", אם נמצא מאורע E כך שמתקיים $|\Pr_\nu[E]-\Pr_\tau[E]|\geq 1-o(1)$, הרי שזהו חסם תחתון על המרחק בין ההתפלגויות. המאורע שנבחר הוא "הפונקציה שנבחר היא חח"ע". לפי ההגדרות מתקיים $\Pr_\tau[E]=1$. עבור ν, נראה שהפונקציה המתקבלת היא חח"ע בהסתברות $o(1)$ בלבד. שיטה מהירה לעשות את זה: נסמן $l=\lfloor\frac{1}{2}n^{2/3}\rfloor$, ואז מתקיים עבור n גדול דיו $l>\frac{1}{3}n^{2/3}$ (ומהנתונים תמיד מתקיים $k-l>\frac{1}{2}n^{2/3}$). אם אין דוגמה נגדית לחח"ע כבר ב־$f(1),\ldots,f(l)$, אז הסיכוי שאף אחד מאלו יופיע ב־$f(l+1),\ldots,f(k)$ חסום ע"י $(1-l/n)^{k-l}<e^{-n^{1/3}/6}=o(1)$.

פתרון לתרגיל השני

לפחות את זה

נניח ש־$f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$ היא הפונקציה הכי קרובה ל־h מבין אלו שמקיימות את התכונה (יכול להיות ש־f אינה יחידה, אבל פונקציה כזו קיימת כי יש קבוצה סופית ולא ריקה של פונקציות מקיימות). נסמן ב־B את קבוצת ההבדל $B=\{k:f(k)\neq h(k)\}$. לכל $A\subseteq B$, נסמן ב־$h_A:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$ את הפונקציה שעבורה $h_A(k)=h(k)$ אם $k\in A$, ו־$h_A(k)=f(k)$ אם $k\notin A$ (שימו לב שאם $k\notin B$ אז בפרט $h_A(k)=h(k)=f(k)$).

חשוב להבין שהמרחק של h_A מהפונקציה הקרובה ביותר המקיימת את התכונה הוא בדיוק $\frac{1}{n}|A|$: זה המרחק של f_A מ־f, ולכל פונקציה g אחרת שמקיימת את התכונה, מכיוון שמתקיים $d(h,g)\geq d(h,f)$, מאי שוויון המשולש מתקיים גם $d(f_A,g)\geq d(h,g)-d(f_A,h)\geq d(h,f)-d(f_A,h)=\frac{1}{n}|B|-\frac{1}{n}(|B|-|A|)=\frac{1}{n}|A|$.

בהינתן אלגוריתם $\mathcal{A}$ שמבצע q שאילתות, ננתח את התפלגות השאילתות שלו כאשר מריצים אותו על f (זה דומה לניתוח של התכונה "הכל אפסים" מתחילת הקורס). לכל $1\leq i\leq n$ נסמן ב־p_i את ההסתברות שהאלגוריתם שאל בשלב כל שהוא את $f(i)$ (כאשר מריצים אותו על f הספציפית הזו – על קלטים אחרים יתכנו הסתברויות אחרות). לפי לינאריות התוחלת מתקיים $\sum_{i\in B}p_i\leq\sum_{i=1}^{n}p_i\leq q$.

נניח ש־n גדול דיו, וננתח מה קורה כאשר מגרילים את $A\subseteq B$ יוניפורמית מקבוצת כל תתי הקבוצה מגודל $2\epsilon n\leq\lfloor\epsilon n\rfloor+1$. תמיד מתקיים ש־$h_A$ הוא ϵ־רחוק מהתכונה. כמו כן, לכל $i\in B$, ההסתברות עבור המאורע $i\in A$ היא $(\lfloor\epsilon n\rfloor+1)/|B|\leq 2\epsilon/\alpha$. על כן התוחלת של $\sum_{i\in A}p_i$ היא לכל היותר $2q\epsilon/\alpha$, ולכן אם $q<\alpha/6\epsilon$ אז קיים A שעבורו $\sum_{i\in A}p_i<\frac{1}{3}$. נעיר כאן שיש עוד שיטה להוכיח את הקיום של הקבוצה A שאנחנו צריכים, ע"י לקיחת את $2\epsilon n\leq\lfloor\epsilon n\rfloor+1$ האינדכסים עם ה־p_i מינימלים, כמו שנעשה בחוברת הקורס בדיון על התכונה של "הכל אפסים".

נקבע עתה את הקבוצה A שהוכחנו את קיומה, עבורה גם $|A|=\lfloor\epsilon n\rfloor+1$ וגם $\sum_{i\in A}p_i<\frac{1}{3}$. נראה שלא יכול להיות ש־$\mathcal{A}$ גם מקבל את f בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ וגם דוחה את f_A בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$, ומכאן החסם התחתון הנדרש על מספר השאילתות של אלגוריתם הבדיקה.

על מנת לתת הוכחה מלאה (בהגשה לא נדרשתם לכזה פירוט), נסתכל על אלגוריתם $\mathcal{A}'$ שמבצע בדיוק את השאילתות של $\mathcal{A}$ כל עוד הוא נתקל בערכים זהים לאלו של f, אבל ברגע שהוא נתקל בערך שונה מזה של f הוא דוחה מיידית (ואם הוא לא נתקל בערך כזה עד סוף הריצה, אז מקבל באותה הסתברות ש־$\mathcal{A}$ היה מקבל). זהו כבר אלגוריתם לא־אדפטיבי, שהתפלגות קבוצת השאילתות שלו זהה לזו של $\mathcal{A}$ כשהוא מורץ על הקלט הספציפי f. ברור גם שהסתברות הדחיה של $\mathcal{A}'$ על f זהה לזו של $\mathcal{A}$, בעוד שעל f_A (או כל פונקציה אחרת) הסתברות הדחיה שלו היא לפחות זו של $\mathcal{A}$. כמו כן, בגלל אופן בחירת A, הסיכוי שהאלגוריתם יגלה על f_A שוני כל שהוא מ־f קטן מ־$\frac{1}{3}$, ולכן זה חוסם את ההפרש בין הסתברויות הדחיה המתאימות של $\mathcal{A}'$, שחוסם בתורו את ההפרש עבור $\mathcal{A}$.

פתרון לתרגיל השלישי

עבריינות מושלמת

נגדיר גרף מכוון G. קבוצת הצמתים תהיה קבוצת האיברים בסדר החלקי D, ולכל $a,b \in D$, הזוג המכוון (a,b) יהיה קשת ב־G אם ורק אם $a > b$ בסדר החלקי (מבחינה פורמלית, "$a > b$" פירושו "$a \geq b$ לפי הסדר החלקי וכמו כן $a \neq b$"). הגרף G הוא חסר מעגלים: נניח בשלילה ש־$a_1, \ldots, a_k$ הוא מעגל פשוט בגרף. לפי הבניה זה אומר שמתקיים $a_1 > \cdots > a_k$, ולכן מטרנזיטיביות הסדר $a_1 > a_k$ (לקחנו מעגל פשוט, ז"א גם שכל ה־a_i שונים זה מזה). כמו כן מתקיים $a_k > a_1$ (הנחנו שהמדובר במעגל ולכן יש קשת מ־a_k ל־a_1), וזו סתירה לאנטי־סימטריה של הסדר החלקי.

לאור זאת ש־G חסר מעגלים, יש לו מיון טופולוגי. נגדיר את $f : D \to \{1, \ldots, d\}$ כך ש־$f(a)$ יהיה המיקום של a במיון הטופולוגי של G. אם $b < a$, אז יש ב־G קשת מ־a ל־b. לכן המיון הטופולוגי ימקם את a לפני b ויתקיים $f(a) < f(b)$, ז"א שהמדובר בזוג מפר מונוטוניות.

פתרון אלטרנטיבי: אחד מכם פתר את השאלה באופן האלגנטי הבא – לכל $a \in D$ מגדירים $L_a = \{c : c \geq a\}$ (שימו לב שמתקיים $a \in L_a$), ואז מגדירים $f(a) = |L_a|$. אם $a < b$ אז L_a מכילה ממש את L_b (בפרט מתקיים $a \in L_a \setminus L_b$), ולכן $f(a) > f(b)$.

שרשור פלינדרומים

נסמן את הקלט שלנו ב־$w_1, \ldots, w_n$. נגריל קבוצה $Q \subseteq \{1, \ldots, n\}$ באופן הבא: כל $1 \leq i \leq n$ ייבחר להיות ב־Q בהסתברות $p = 2\sqrt{\log(n)/\epsilon n}$, באופן ב"ת באחרים. אם $|Q| > 12\sqrt{n \log(n)/\epsilon}$, אז לא נשאל שאילתות ופשוט נקבל את הקלט מיידית. מאורע זה (לפי אי־שוויון מרקוב) יקרה בהסתברות חסומה ע"י $\frac{1}{6}$. בכל מקרה אחר, נשאל את כל השאילתות w_i עבור $i \in Q$.

לכל k, אם קיים $i \leq k$ כך ש־$\{i, k+1-i\} \subseteq Q$ וגם $w_i \neq w_{k+1-i}$, או שקיים $i > k$ כך ש־$\{i, n+k+1-i\} \subseteq Q$ וגם $w_i \neq w_{n+k+1-i}$, אז זה אומר ש־$w_1, \ldots, w_n$ לא יכול להיות שרשור של פלינדרום באורך k ופלינדרום באורך $n-k$. במקרה כזה אפשר לפסול את k.

אם הצלחנו לפסול את כל ערכי $1 \leq k \leq n$ האפשריים, נדחה את הקלט. אחרת נקבל אותו. לא קשה לראות שאם הקלט הוא באמת שרשור של שני פלינדרומים, אז ערך k המתאים לאורך הפלינדרום הראשון לא יפסל, ולכן האלגוריתם יקבל (בהסתברות 1) קלט שמקיים את התכונה.

מצד שני, נניח עתה שהקלט שלנו הוא ϵ־רחוק מלהיות שרשור של שני פלינדרומים. זה אומר שלכל $1 \leq k \leq n$, חייבים להיות לפחות ϵn ערכים של i שמקיימים $i < k+1-i$ ו־$w_i \neq w_{k+1-i}$ או מקיימים $k < i < n+k+1-i$ ו־$w_i \neq w_{n+k+1-i}$. הסיבה כאן לחסמים העליונים האחרים על i (לעומת התנאי שבודקים למעלה) היא שכאן אנחנו סופרים רק פעם אחת כל זוג של i והאינדכס השני שצריך להתאים אתו (אנחנו בוחרים רק את ה־i שקטן מ"בן הזוג" שלו, כדי לא לספור את הזוג פעמיים). לכל ערך כזה, הסיכוי שגם i וגם האינדכס שמתאים אתו יבחרו בו זמנית הוא $p^2 = 4\log(n)/\epsilon n$. הסיכוי שאף אחד מהזוגות הפוסלים את k לא יבחר במלואו חסום ע"י $(1 - 4\log(n)/\epsilon n)^{\epsilon n} < \frac{1}{6n}$. על כן בסיכוי לפחות $\frac{5}{6}$ נבחר Q שיכול להוביל לפסילת כל ה־k האפשרים ודחיית את הקלט.

סה"כ, אם הקלט הוא ϵ־רחוק מהתכונה, אז בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ בחרנו Q שהוא גם לא גדול מדי (כך שלא נקבל מבלי לבצע את השאילתות בו) וגם כזה שמכיל שאילתות שיובילו לדחיית הקלט.

פתרון לתרגיל הרביעי

איתור מפירים

נשתמש במה שאנחנו יודעים מניתוח כללי של גרף ההפרות. אם הפונקציה $f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$ היא ϵ־רחוקה ממונוטוניות, אז חייבים להיות לפחות $\frac{1}{2}\epsilon n$ זוגות מפרים זרים. נסמן אותם ב־$(i_1,j_1),\ldots,(i_r,j_r)$ עם $r\geq\frac{1}{2}\epsilon n$, כאשר $i_k<j_k$ לכל $1\leq k\leq r$. נניח גם שאנחנו ממיינים אותם לפי האינדכס הראשון, ז"א $i_1<\cdots<i_r$. מכיוון שהטווח של הפונקציה הוא $\{0,1\}$, לכל זוג מפר חייב להתקיים $f(i_k)=1$ ו־$f(j_k)=0$. על כן לכל $k<l$ מתקיים ש־(i_k,j_l) הוא זוג מפר, מכיוון ש־$i_k<i_l<j_l$.

- נניח שאנחנו בוחרים באופן יוניפורמי עם חזרות $8/\epsilon$ אינדכסים. בהסתברות לפחות $\frac{5}{6}$ אנחנו נבחר לפחות אחד מהאינדכסים $i_1,\ldots,i_{\lceil r/2\rceil}$ (החישוב הוא לפי $(1-\frac{\epsilon}{4})^{8/\epsilon}\leq\frac{1}{6}$), ובהסתברות לפחות $\frac{5}{6}$ אנחנו נבחר לפחות אחד מהאינדכסים $j_{\lfloor r/2\rfloor+1},\ldots,j_r$, ולכן בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ אנחנו נעשה את שתי הבחירות שמהוות יחדיו זוג מפר. בפרט יהיה זוג מפר בתוך קבוצת האינדכסים שלנו.
- אם בוחרים זוג בודד i,j (כל אינדכס באופן יוניפורמי וב"ת, בלי לדרוש למשל $i<j$), אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{4}\epsilon$ יתקיים $i\in\{i_1,\ldots,i_{\lceil r/2\rceil}\}$ ובהסתברות לפחות $\frac{1}{4}\epsilon$ יתקיים $j\in\{j_{\lfloor r/2\rfloor+1},\ldots,j_r\}$, ומכיוון שאלו מאורעות ב"ת נקבל שבהסתברות לפחות $\frac{1}{16}\epsilon^2$ שני המאורעות יתקיימו ונקבל זוג מפר.

חסם לזוגות

נניח שמתקיים $\epsilon<\frac{1}{5}$ ו־$n>10$. הפונקציה f שלנו תקבל את הערך 0 על קבוצת האינדכסים $\{2,4,6,\ldots,2\lfloor\epsilon n\rfloor+2\}$, ותקבל את הערך 1 בשאר התחום. יש לפונקציה יותר מ־ϵn זוגות מפרים זרים, אלו מהצורה $(2k-1,2k)$ עבור $k\in\{1,\ldots,\lfloor\epsilon n\rfloor+1\}$, ולכן היא ϵ־רחוקה ממונוטוניות. מצד שני, זוג מפר (i,j) חייב בפרט לקיים $i\in\{1,3,5,\ldots,2\lfloor\epsilon n\rfloor+1\}$ ו־$j\in\{2,4,6,\ldots,2\lfloor\epsilon n\rfloor+2\}$ (הקבוצה עבור j היא קבוצת כל ה־0 של f, והקבוצה עבור i היא קבוצת כל ה־1 שמופיעים באינדכסים קטנים מהערך המקסימלי האפשרי עבור j). חישוב ישיר מראה שעבור בחירה יוניפורמית של i ו־j זה קורה בהסתברות $O(\epsilon^2)$ בלבד.

פתרון לתרגיל החמישי

איפכא מסתברא

עבור בניית אלגוריתם הבדיקה האדפטיבי, נסמן ב־$B \subseteq \{1,\ldots,n\}$ את קבוצת האינדכסים ה"רעים" שעבורם $g(f(i)) \neq i$. נראה שאפשר להפוך את פונקציות הקלט להפכים באמצעות $2|B|$ שינויים, וזה נותן לנו אלגוריתם לבדיקת התכונה: מגרילים באופן יוניפורמי $\lceil 2/\epsilon \rceil$ אינדכסים, ולכל אחד מהם בודקים באמצעות 2 שאילתות האם הוא שייך ל־B. דוחים אם מוצאים אינדכס ב־B.

בהינתן B, על מנת להפוך את הפונקציות f,g להפכים, נסמן את $C = \{1,\ldots,n\} \setminus f(\{1,\ldots,n\} \setminus B)$. במילים – זוהי קבוצת האיברים שאינם נמצאים בתמונה לפי f של האיברים ה"טובים" (אלו שעבורם מתקיים $g(f(i)) = i$). מכיוון ש־f היא חח"ע מעל $\{1,\ldots,n\} \setminus B$ (כי $g|_{f(\{1,\ldots,n\}\setminus B)}$ היא ההפוכה שלה), מתקיים $|C| = n - (n - |B|) = |B|$. נגדיר את h להיות פונקציה חח"ע ועל מ־B ל־C, ואת $h^{-1} : C \to B$ להיות ההפוכה שלה. לבסוף, נשתמש בהגדרות הבאות.

$$\tilde{f}(i) = \begin{cases} f(i) & i \notin B \\ h(i) & i \in B \end{cases} \qquad\qquad \tilde{g}(j) = \begin{cases} g(j) & j \notin C \\ h^{-1}(j) & j \in B \end{cases}$$

לא קשה לוודא ש־$\tilde{g}$ היא ההופכית ל־$\tilde{f}$, וכן שפונקציות אלו נבדלות מהקלט המקורי ב־$2|B|$ מקומות.

מסתברא איפכא

בסימונים של התשובה הקודמת, נשים לב שאם f עצמה היא חח"ע, אז המרחק של הקלט מהתכונה הוא לפחות $|B|/2n$. הסיבה היא שלכל $i \in B$ נצטרך לשנות לפחות אחד מהערכים $f(i)$ או $g(f(i))$ (אפשר עם טיפה יותר הוכחה להראות זאת גם בלי ההנחה ש־f היא חח"ע).

עתה נגדיר שתי התפלגויות, לפי השיטה של יאו נגד אלגוריתמים לא־אדפטיביים. בהתפלגות τ, הפונקציה $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ תהיה פרמוטציה מקרית שנבחרה יוניפורמית (מבין $n!$ האפשרויות), ו־g תהיה הפרמוטציה ההפוכה לה. בהתפלגות ν, הפונקציה f תהיה פרמוטציה מקרית שנבחרה יוניפורמית, ו־g תהיה פרמוטציה מקרית שנבחרה באופן יוניפורמי וב"ת ב־f. ההסתברות של i להיות ב־B היא בדיוק $1 - \frac{1}{n}$, ולכן תוחלת הגודל של $\{1,\ldots,n\} \setminus B$ היא 1 (איבר בודד). מאי־שוויון מרקוב נובע מכך שבהסתברות $1 - o(1)$ נקבל קלט $\frac{1}{4}$־רחוק מהתכונה.

(הערה – אם היתה כאן הוכחת חסם תחתון על מספר השינויים גם במקרה ש־f אינה חח"ע, אז היה אפשר ב־ν לקחת שתי פונקציות מקריות לחלוטין, אבל כאן לא הוכחנו את זה ולכן לקחנו שתי פרמוטציות מקריות)

נסמן קבוצת שאילתות כזוג של קבוצות R, Q, כאשר R היא קבוצת האינדכסים ששואלים מ־f ו־Q היא קבוצת האינדכסים ששואלים מ־g. אנחנו רוצים לנתח את ההתפלגות של $(f|_R, g|_Q)$ במקרה שהפונקציות מוגרלות לפי τ ובמקרה שהן מוגרלות לפי ν. נגדיר את E להיות המאורע שקיים $i \in R$ שעבורו $f(i) \in Q$ ו/או קיים $j \in Q$ שעבורו $g(j) \in R$. נשים לב שההסתברות שעבור i ספציפי יתקיים $f(i) \in Q$ היא בדיוק $|Q|/n$, ולכן מאיחוד מאורעות ההסתברות שיהיה $i \in Q$ כזה חסומה ע"י $|R||Q|/n$. זה נכון גם בהתפלגות ν וגם בהתפלגות τ. באופן דומה, ההסתברות שיהיה $j \in Q$ שעבורו $g(j) \in R$ חסומה ע"י $|R||Q|/n$. סה"כ (שוב איחוד מאורעות) מתקיים גם $\Pr_\nu[E] \le 2|R||Q|/n$ וגם $\Pr_\tau[E] \le 2|R||Q|/n$. על כן אם אנחנו מתירים מספר שאילתות כולל $(|R| + |Q|)$ שאינו עולה על $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, ההסתברות של E בשני המקרים חסומה ע"י $\frac{1}{8}$.

הדבר שנותר לעשות הוא לנתח את ההתפלגות של $(f|_R, g|_Q)$ תחת ההתניה של $\neg E$. הדבר לראות הוא שגם ב־ν וגם ב־τ המדובר יהיה באותה התפלגות – זאת תהיה ההתפלגות היוניפורמית של בחירה של פונקציה חח"ע מ־R ל־$\{1,\ldots,n\} \setminus Q$ ושל פונקציה חח"ע מ־Q ל־$\{1,\ldots,n\} \setminus R$ (כל פונקציה נבחרת באופן ב"ת בשניה). מזה נובע שהמרחק של ההתפלגויות הלא־מותנות של $(f|_R, g|_Q)$, תחת τ ותחת ν, חסומה ע"י $\frac{1}{8}$. מכל אלו נובע ש־τ ו־ν הן זוג התפלגויות המעיד על חסם תחתון של $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ שאילתות עבור $\frac{1}{4}$־בדיקה.

פתרון לתרגיל השישי

כמעט אחידות

עבור הקלט $f:\{1,\ldots,n\}^2\to\{0,1\}$, הערכים $1\le k,l\le r$, והקבוצה $I_{r,k}\times I_{r,l}$, אנחנו נגיד שקבוצה זו היא ϵ־אחידה ביחס ל־f אם כל ערכי $f|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ פרט לכל היותר $\epsilon\cdot|I_{r,k}|\cdot|I_{r,l}|$ מהם שווים זה לזה.

האלגוריתם יבנה פונקציה $h:\{1,\ldots,r\}^2\to\{0,1\}$ בצורה הבאה: לכל $1\le k,l\le r$, האלגוריתם יבצע $t=\lceil\frac{4}{\epsilon}\log(r)\rceil$ שאילתות מהצורה $f(i,j)$ כאשר $(i,j)\in I_{k,l}$ נבחרים באופן יוניפורמי וב"ת לכל שאילתה. אם כל התשובות לשאילתות היו "0" אז נגדיר $h(k,l)=0$, אם כל התשובות היו "1" אז נגדיר $h(k,l)=1$, ואם קיבלנו את שני הערכים בתשובות אז נגדיר $h(k,l)=2$.

לאחר בניית h, אם הפונקציה קיבלה את הערך 2 ביותר מ־ϵr^2 מקומות אז נחזיר "$\perp$", ואחרת נחזיר את הפונקציה $g:\{1,\ldots,n\}^2\to\{0,1\}$ שנבנית בצורה הבאה: לכל $1\le k,l\le r$ ולכל $(i,j)\in I_{r,k}\times I_{r,l}$, נגדיר $g(i,j)=\min\{h(k,l),1\}$.

ראשית, נשים לב שלכל קבוצה שעבורה $f|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ היא פונקציה קבועה, g תקבל את הערך המתאים בהסתברות 1. בפרט, אם f היא (ϵ,r)־אחידה, אז (בהסתברות 1) יהיו פחות מ־ϵr^2 ערכי 2 ל־g ולכן אנחנו נוציא ערך כל שהוא (לא "$\perp$").

עתה, נשים לב שאם קבוצה מסויימת $I_{r,k}\times I_{r,l}$ אינה ϵ־אחידה, אז אנחנו נגלה אותה (ונגדיר $g(k,l)=2$) בהסתברות לפחות $1-2(1-\epsilon)^t>1-1/3r^2$, ובנוסף, אם הקבוצה $I_{r,k}\times I_{r,l}$ כן ϵ־אחידה, אז בהסתברות לפחות $1-\epsilon^t>1-1/3r^2$ נגלה את הערך שמתקבל ברב המקומות (וזה אומר ש־$g(k,l)$ תקבל או את הערך של רב המקומות או את הערך "2"). לפי איחוד מאורעות, בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ דבר זה יקרה לכל r^2 האפשרויות עבור $1\le k,l\le r$.

המסקנה היא שבהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ אנחנו במצב שהפלט הוא או "$\perp$" או פונקציה g שמקיימת את הדברים הבאים: לכל (k,l) שמקיימים $h(k,l)<2$, הפונקציה $g|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ תהיה זהה ל־$f|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ בכל המקומות פרט לכל היותר $\epsilon|I_{r,k}\times I_{r,l}|$ מהם, ואין יותר מ־ϵr^2 זוגות (k,l) שעבורם $h(k,l)=2$. בפרט האיחוד של הקבוצות $I_{r,k}\times I_{r,l}$ עבור כל הזוגות שעבורם $h(k,l)=2$ חסום ע"י $3\epsilon n^2$ (כאן השתמשנו בהנחה ש־n גדול מספיק ביחס ל־r). סה"כ נקבל ש־f ו־g נבדלות ביניהן בלא יותר מ־4ϵ מקומות.

בדיקה באמצעות למידה של מונוטוניות

אנחנו נראה שאם f היא מונוטונית אז יש לכל היותר $2r-1$ זוגות (k,l) שעבורם $f|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ אינה פונקציה קבועה, ומכאן נקבל את המאפיין של $(2/r,r)$־אחידות. ראשית נשים לב שאם $1\le k<k'\le r$ וגם $1\le l<l'\le r$, אז לא יתכן שגם $f|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ וגם $f|_{I_{r,k'}\times I_{r,l'}}$ אינן קבועות (ז"א שהן מקבלות גם 0 וגם 1), כי אז אנחנו יכולים למצוא דוגמה נגדית למונוטוניות (ה־1 של $f|_{I_{r,k}\times I_{r,l}}$ וה־0 של $(f|_{I_{r,k'}\times I_{r,l'}})$. כמסקנה, עבור $1-r\le s\le r-1$, אם נסתכל על האלכסון $D_s=\{(k,k+s):\max\{1,1-s\}\le k\le\min\{r,r-s\}\}$, יהיה בו לכל היותר ערך אחד של k שעבורו $f|_{I_{r,k}\times I_{r,k+s}}$ אינה קבועה. סה"כ יכולים להיות לכל היותר $2r-1$ ערכים כאלה (אחד לכל s אפשרי) בכל הזוגות האפשריים עבור $1\le k,l\le r$.

על מנת לבדוק מונוטוניות באמצעות למידה, נבחר r שעבורו מתקיים $2/r<\frac{1}{8}\epsilon$, ונבצע את הלמידה של הסעיף הקודם עם פרמטר $\frac{1}{8}\epsilon$ (ע"מ לקבל או "$\perp$" או פונקציה $\frac{1}{2}\epsilon$־קרובה למקורית) – עבור n שאינו גדול מספיק יחסית ל־r פשוט נקרא את f במלואה. אם אלגוריתם הלמידה פלט פונקציה g שהיא $\frac{1}{2}\epsilon$־קרובה למונוטוניות אז נקבל את f, ובכל מקרה אחר נדחה את f.

אם f היא מונוטונית אז היא בפרט $(\frac{1}{8}\epsilon,r)$־אחידה, ולכן אלגוריתם הלמידה בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ (ולמעשה בהסתברות 1) יחזיר פונקציה g שהיא $\frac{1}{2}\epsilon$־קרובה ל־f ולכן למונוטוניות, והאלגוריתם יקבל.

אם f היא ϵ־רחוקה ממונוטוניות, אז בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ אלגוריתם הלמידה יחזיר או "$\perp$" או פונקציה שהיא $\frac{1}{2}\epsilon$־קרובה ל־f (ולכן $\frac{1}{2}\epsilon$־רחוקה ממונוטוניות), ובשני מקרים אלו האלגוריתם אכן ידחה.