פתרונות לתרגיל הראשון

בחירה בלי מגוון

נבצע את ההגרלה בצורה הבאה: עבור $1 \le i \le c$, נסמן את $A_i = \{a : f(a) = i\}$. עתה נגריל באופן מקרי ערך J כך ש־$\Pr[J = i] = |A_i|/n$ לכל $1 \le i \le c$ (שימו לב שסכום ההסתברויות הוא אכן 1). בהינתן הערך של J, אם $|A_J| < k$ אז נגדיר $K = \emptyset$, ואחרת נגריל את K באופן יוניפורמי מתוך $\binom{A_J}{k}$, משפחת תתי הקבוצה של A_J מגודל k. הדברים הבאים מתקיימים עבור $a \in A$, בהתאמה לסעיפי השאלה:

- אם $|A_{f(a)}| < k$ אז $\Pr[a \in K] = 0$ (כי אם "קבוצת הצבע" של a מוגרלת אז היא תהיה קטנה מדי מכדי להגריל קבוצה לא־ריקה עבור K), ואם $|A_{f(a)}| \ge k$ אז לפי שימוש בחוק בייז מתקיים $\Pr[a \in K] = \Pr[a \in K | J = f(a)] \Pr[J = f(a)] = (k/|A_{f(a)}|)(|A_{f(a)}|/n) = k/n$.
- מכיוון שלפי ההגדרות למעלה תמיד $K \subseteq A_J$ עבור J כל שהוא, לכל $a \in K$ מתקיים $J = f(a)$, ז"א שהערכים של f שווים זה לזה עבור איברי K.
- ההסתברות לכישלון היא סכום ההסתברויות של $\Pr[J = i]$ עבור i המקיימים $|A_i| < k$, ומכיוון שיש רק c ערכים אפשריים ל־J, ההסתברות הזו חסומה ע"י $c(k-1)/n$. אפשר אם כן לקבוע $N(c, k, \epsilon) = c(k-1)/\epsilon$ לקבלת החסם על $\Pr[K = \emptyset]$.

מרחב הסתברות בסגנון רמזי

הבחירה שלנו תהיה לפי השלבים הבאים. הפונקציה N המופיעה בהם היא זו מהשאלה "בחירה בלי מגוון".

1. נבחר באופן יוניפורמי קבוצה $X' \subset U$ מתוך $\binom{U}{k'}$, משפחת כל תתי־הקבוצה של U מגודל k'. אנחנו נשתמש ב־$k' = N(c, k, \epsilon/2)$, הבחירה הזו תוסבר אח"כ. נסמן $X' = \{x'_1, \ldots, x'_{k'}\}$, לפי סדר שהגדרנו מראש על כל צמתי U.
2. נצבע את V ב־$c^{k'}$ צבעים: לכל $v \in V$, נגדיר את $f'(v)$ להיות הסדרה $f(x'_1 v), \ldots, f(x'_{k'} v)$ (יש סה"כ $c^{k'}$ אפשרויות).
3. נשתמש בתוצאת השאלה "בחירה בלי מגוון" לבחירת קבוצה Y מגודל k מתוך V. כאן המקום להגדיר את $M(c, k, \epsilon) = N(c^{k'}, k, \epsilon/2)$, כך שהסיכוי לכישלון בשלב זה אינו עולה על $\epsilon/2$ (נשים לב שגם מתקיים כאן $M(c, k, \epsilon) > k'$). אם נכשלנו בשלב זה אז נעצור את האלגוריתם ונחזיר את הזוג $(\emptyset, \emptyset)$.
4. נשים לב שעתה לכל צומת $x' \in X'$ מתקיים שערכי $f(x', y)$ זהים זה לזה עבור כל האפשרויות של $y \in Y$, בגלל הצורה שבחרנו את Y. נתייחס אם כן ל־f כאל צביעה של צמתי X', ונשתמש שוב בשאלה "בחירה בלי מגוון" על מנת לבחור קבוצה $X \subset X'$ מגודל k. לפי הגדרת k', הסיכוי לכישלון גם בשלב זה אינו עולה על $\epsilon/2$. אם נכשלנו אז נחזיר את הזוג $(\emptyset, \emptyset)$, ואחרת נחזיר את (X, Y).

עתה ננתח את התוצאה שקיבלנו. כפי שראינו מתיאור האלגוריתם, ההסתברות הכוללת לכישלון (החזרת קבוצות ריקות) חסומה ע"י ϵ, ולפי ניתוח מצב הצביעה בשלב האחרון, כל הזוגות מתוך $X \times Y$ אכן צבועים באותו צבע. נשאר לנו עבור $(u, v) \in U \times V$ לחסום את הסיכוי שבחרנו את שני הצמתים. לפי חוק בייז:

$$\Pr[u \in X \wedge v \in Y] = \Pr[u \in X'] \cdot \Pr[v \in Y | u \in X'] \cdot \Pr[u \in X | u \in X' \wedge v \in Y]$$

המוכפל השמאלי שווה ל־k'/n (בחירה יוניפורמית פשוטה של תת־קבוצה), המוכפל האמצעי, בגלל אופן השימוש בתוצאת השאלה "בחירה בלי מגוון", חסום ע"י k/n, והמוכפל הימני (גם בגלל השימוש ב"בחירה בלי מגוון") חסום ע"י k/k'. סה"כ קיבלנו חסם כולל של k^2/n^2 כנדרש.

וקטורים בהגרלה

יש (לפחות) שני פתרונות אפשריים.

פתרון בעזרת חוק בייז: עבור $0 \leq i \leq n$, מגדירים את E_i להיות המאורע ש־$\{v_1,\ldots,v_i\}$ היא קבוצה ב"ת. באופן פורמלי E_0 הוא מאורע המתקיים בהסתברות 1, שקבוצת הווקטורים הריקה היא ב"ת. שימו לב שהמאורע E_i מכיל את כל המאורעות $E_0,\ldots,E_{i-1}$. מכך ניתן להוכיח לפי חוק בייז באינדוקציה שמתקיים $\Pr[E_i] = \prod_{j=1}^{i}\Pr[E_j|E_{j-1}]$: הבסיס $i=1$ נובע מכך ש־$\Pr[E_0]=1$, והמעבר הוא לפי $\Pr[E_i] = \Pr[E_i \wedge E_{i-1}] = \Pr[E_i|E_{i-1}]\Pr[E_{i-1}] = \prod_{j=1}^{i}\Pr[E_j|E_{j-1}]$.

ההסתברות $\Pr[E_i|E_{i-1}]$ היא $1-\Pr[w_i \in \mathrm{span}\{w_1,\ldots,w_{i-1}\}]$, וע"י חישוב המימד של המרחב הנפרש על הווקטורים הקודמים (כאשר לפי E_{i-1} כבר ידוע שזו קבוצה ב"ת), מתקבל $\Pr[E_i|E_{i-1}] = 1-2^{i-1-n}$. מאלו מתקבל $\Pr[E_i] = \prod_{j=1}^{n}(1-2^{j-1-n}) \geq \prod_{j=1}^{\infty}(1-2^{-j})$, ולפי מה שאתם זוכרים (אולי) מאינפי', המכפלה האינסופית הימנית גדולה מ־0 (נובע מההתכנסות של $\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}$; או אפשר להשתמש בזה שעבור כל $x>0$ קטן מספיק מתקיים $1-x > e^{-2x}$; יש עוד אפשרויות הוכחה, אבל ממילא יש גם את הצעת הפתרון האלטרנטיבי למטה).

פתרון ע"י איחוד מאורעות: ע"מ להוכיח חסם על ההסתברות ש־$\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ ב"ת, נסתכל על סידרת ערכים $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \in \{0,1\}$ שלא כולם אפס, ונשים לב שמתקיים $\Pr[\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i = 0] = 2^{-n}$ (עבור וקטורים $v_1,\ldots,v_{n-1}$ הנבחרים מקרית). לפי איחוד מאורעות, מכיוון שיש $2^{n-1}-1$ סדרות אפשריות של $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ אין סידרה $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ שמאפסת את הקומבינציה הלינארית המתאימה של הווקטורים, ומכאן שקבוצת הווקטורים היא ב"ת. אם רוצים להוכיח עבור $\{v_1,\ldots,v_n\}$, אז כמו בסעיף הקודם עושים שימוש (הפעם יחיד) בהסתברות המותנה על המאורע שכבר חסמנו, ומקבלים חסם תחתון של $\frac{1}{4}$ על המאורע המבוקש.

פתרונות לתרגיל השני

לא אי שוויון מרקוב

נבנה את ההתפלגות הבאה מעל ערכי X, עבור מספר טבעי k שנגדיר בהמשך: נקבע $\Pr[X=0]=1-\alpha/2$, ולכל $1 \le i \le k$ נקבע $\Pr[X=i]=\alpha/2k$. מניחים $\alpha \le 1$ (אחרת פשוט נחליף אותו בערך קטן יותר). מההגדרה ברור שהמדובר במרחב הסתברות (כל ההסתברויות אי־שליליות וסכומן הוא 1), וגם קל לוודא את תנאי המונוטוניות, ושמתקיים $\Pr[X>0]=\alpha/2<\alpha$. נותר לחשב את התוחלת בחישוב ישיר: $\mathrm{E}[X]=\alpha(k+1)/4$. בחירה מתאימה של למשל $k=\lceil 4\beta/\alpha \rceil$ תתן את המבוקש.

קודים חסרי רישות

נסמן ב־n את האורך המקסימלי של מילה ב־C, ונבנה את מרחב ההסתברות הבא מעל מילים באורך $\{0,1\}^n$: ראשית בוחרים מילה w לפי μ. נסמן את האורך שהתקבל עבורה ב־k, ואת המילה עצמה ב־$(w_1,\ldots,w_k)\in\{0,1\}^k$ (זה בזה וגם ב־w). עתה נגריל את $w_{k+1},\ldots,w_n$ באופן יוניפורמי וב"ת (זה בזה וגם ב־w), ונקבל וקטור מקרי $v=(w_1,\ldots,w_n)\in\{0,1\}^n$. מכיוון שיש לנו עכשיו מרחב הסתברות ν מעל $\{0,1\}^n$, לפחות אחד הווקטורים בו מופיע בהסתברות לפחות 2^{-n}. נסמן וקטור זה ב־$\hat{v}$. לפי הגדרת ν, חייבת להיות ל־$\hat{v}$ רישה ב־C (כל הווקטורים שם מתקבלים ע"י בחירת מילה מתוך C ושרשור של אותיות נוספות אחריה). כמו כן, מכיוון שהקוד C הוא חסר רישות, יכולה להיות ל־$\hat{v}$ רישה אחת בלבד מתוך C. נסמן אותה ב־$\hat{w}$, ואת אורך $\hat{w}$ נסמן ב־$\hat{k}$. נשים לב שמתקיים $2^{-n}\le\Pr_\nu[\hat{v}]=\Pr_\mu[\hat{w}]\cdot 2^{\hat{k}-n}$, כי התווים $\hat{w}_{\hat{k}+1},\ldots,\hat{w}_n$ נבחרו באופן יוניפורמי וב"ת. בהעברת אגפים מקבלים את המבוקש.

מן הקטן לגדול

ההוכחה תהיה בשלילה. נניח שקיימות קבוצות צמתים זרות U,W מגודל לפחות k, כך שמספר הקשתות ב־G מ־U ל־W אינו בתחום $(\frac{1}{2}\pm\alpha)|U|\cdot|W|$. נגריל באופן יוניפורמי קבוצה $U'\subseteq U$ מגודל k בדיוק (במילים אחרות, נגריל אותה מתוך $\binom{U}{k}$), ונגריל באופן יוניפורמי קבוצה $W'\subseteq W$ מגודל k בדיוק. אם נסמן ב־$e(U,W)$ את מספר הקשתות מ־U ל־W, וב־$d(U,W)=e(U,W)/|U|\cdot|W|$ את ה"צפיפות" שלהן, אז תוחלת מספר הקשתות מ־U' ל־W' היא בדיוק $k^2 d(U,W)$.

על מנת להוכיח את הטענה על התוחלת, נשים לב שאם uw קשת מ־U ל־W, אז ההסתברות שהיא תהיה גם קשת מ־U' ל־W', ז"א ההסתברות למאורע $u\in U'\wedge w\in W'$, היא בדיוק $k^2/|U|\cdot|W|$. על מנת לחשב את התוחלת של $e(U',W')$, נסמן משתנה אינדיקטור עבור מאורע ההכלה המתאים לכל קשת כזו uw, ונשתמש בלינאריות התוחלת (המספר הכולל $e(U',W')$ הוא סכום של $e(U,W)$ משתני אינדיקטור, שלכל אחד מהם תוחלת של $k^2/|U|\cdot|W|$), לקבלת $\mathrm{E}[e(U',W')]=k^2 d(U,W)$.

עתה אם היה מתקיים $d(U,W)>\frac{1}{2}+\alpha$, אז, מכיוון שבסיכוי חיובי מ"מ יקבל לפחות את ערך התוחלת שלו, היתה בחירה ספציפית של U',W' שעבורה $e(U',W')\ge\mathrm{E}[e(U',W')]>(\frac{1}{2}+\alpha)k^2$, והיינו מקבלים סתירה להנחות השאלה. אם היה מתקיים $d(U,W)<\frac{1}{2}-\alpha$, אז, מכיוון שבסיכוי חיובי מ"מ יקבל לכל היותר את ערך התוחלת שלו, היתה בחירה ספציפית של U',W' שעבורה $e(U',W')\le\mathrm{E}[e(U',W')]<(\frac{1}{2}-\alpha)k^2$.

מנצחים ומפסידים

אנחנו נגריל את התחרות $G=(V,E)$, כאשר $|V|=n$, ע"י כך שבאופן יוניפורמי וב"ת, לכל זוג צמתים (שונים) $u,v\in V$ נחליט האם $uv\in E$ או $vu\in E$. לכל אחד מהסעיפים של השאלה נוכיח (עבור בחירה מתאימה של C) שהוא מתקיים בהסתברות $1-o(1)$, ולכן שני המאורעות גם יתקיימו בהסתברות $1-o(1)$, ובפרט תחרות כזו תהיה קיימת.

את ההסתברות עבור הסעיף הראשון נחסום ע"י חסימת סטיות גדולות. עבור זוג ספציפי של קבוצות זרות U,W מגודל $\lceil C\log n\rceil$ בדיוק, הסיכוי שמספר הקשתות מ־U ל־W יחרוג מ־$|U|\cdot|W|(\frac{1}{2}\pm\alpha)$ חסום ע"י $2e^{-2\alpha^2(\lceil C\log n\rceil)^2}=O(e^{-2(\alpha C\log n)^2})$. מספר הזוגות האפשריים של קבוצות כאלו חסום ע"י $\binom{n}{\lceil C\log n\rceil}\binom{n-\lceil C\log n\rceil}{\lceil C\log n\rceil}=o(n^{2\lceil C\log n\rceil})=o(e^{2C(\log n)^2})$. בחירה מתאימה של $C=1/\alpha^2$ תבטיח (לפי איחוד מאורעות) שהסיכוי לקיום זוג חורג כל שהוא חסום ע"י $o(1)$, כנדרש. כאשר החסמים הנדרשים מתקיימים עבור כל זוג של קבוצות זרות U,W מגודל $\lceil C\log n\rceil$ בדיוק, הם יתקיימו גם עבור כל זוג של קבוצות זרות מגודל $\lceil C\log n\rceil$ או יותר לפי תוצאת השאלה "מן הקטן לגדול".

נעבור לסעיף השני, וכאן משתמשים בשיטת המומנט השני. לכל $v\in V$ נסמן ב־A_v את המאורע שיש עבור v יותר קשתות יוצאות מנכנסות, ונסמן ב־X_v את משתנה האינדיקטור עבור A_v (ז"א שאם A_v מתקיים אז $X_v=1$, ואחרת $X_v=0$). מתקיים $\mathrm{E}[X_v]=\Pr[A_v]=\frac{1}{2}$ בדיוק (זה עוזר כאן שדרשנו ש־n זוגי – אפשר לעשות התאמה חח"ע ועל בין הגרפים המקיימים את A_v ואלו שלא, ע"י היפוך כל הקשתות הסמוכות ל־v). לכל $u,v\in V$ שונים זה מזה, מתקיים $\mathrm{Cov}[X_u,X_v]=\Pr[A_u\wedge A_v]-\Pr[A_u]\Pr[A_v]$.

בשלב זה היה אפשר להוכיח ישירות (ע"י חישוב ישיר של $\Pr[A_u\wedge A_v]$) שעבור $X_u\neq X_v$ מתקיים $\mathrm{Cov}[X_u,X_v]\leq 0$, ואז היינו מקבלים חסם טוב עבור $\mathrm{V}[\sum_{v\in V}X_v]$ בהמשך. כאן (עבור הערך הלימודי) נראה הוכחה שמתקיים $\mathrm{Cov}[X_u,X_v]=o(1)$ שמשתמשת בשיקולים יותר כלליים.

על מנת לחסום את הקוואריאנס, נסמן ב־E_{uv} את המאורע שמספר הקשתות שיצאו מ־u לצמתים שונים מ־v (ו־u עצמו) אינו בדיוק $(n-2)/2$. חישוב ישיר מגלה שההסתברות למאורע זה היא $1-o(1)$ (משתמשים באי השוויון $\binom{2m}{m}=o(2^m)$). כמו כן, אם מתנים על $E_{uv}\wedge E_{vu}$, אז המאורעות A_u ו־A_v הופכים להיות ב"ת זה בזה, כיוון שהקשת בין u ל־v לא משפיעה עליהם במקרה כזה. מצד שני (לפי התאמה מתאימה בין הגרפים), גם בהתניה על $E_{uv}\wedge E_{vu}$ המאורעות A_u ו־A_v הם מאורעות מהסתברות $\frac{1}{2}$. על כן מתקיים $\Pr[A_u\wedge A_v|E_{uv}\wedge E_{vu}]=\frac{1}{4}$.

מהדיון למעלה מתקיים (ראו את הפרק על מרחק בין התפלגויות בחוברת התרגילים) $\Pr[A_u\wedge A_v]=\frac{1}{4}+o(1)$, ועל כן $\mathrm{Cov}[X_u,X_v]=o(1)$. מכאן שאם מסמנים את מספר הצמתים עם יותר קשתות יוצאות מנכנסות ב־$X=\sum_{v\in V}X_v$, אז X מקיים $\mathrm{E}[X]=\frac{1}{2}n$ וגם $\mathrm{V}[X]=\sum_{u,v\in V}\mathrm{Cov}[X_u,X_v]=\frac{1}{4}n+o(n^2)=o(n^2)$. לכן, לפי חוק צ'בישף, מתקיים $\Pr[|X-\frac{1}{2}n|>\alpha n]<\mathrm{V}[X]/(\alpha n)^2=o(1)$. זה נותן לנו את חסם ההסתברות עבור סעיף השאלה השני.

פתרונות לתרגיל השלישי

פסוקיות בסדר

ההוכחה שקיימת הצבה שמספקת לפחות $\frac{5}{6}m$ פסוקיות מתבצעת באמצעות לינאריות התוחלת. מגרילים את σ באופן מקרי ויוניפורמי (מתוך $n!$ האפשרויות לפרמוטציה הזו), מסמנים ב־X_r עבור $1 \leq r \leq m$ את משתנה האינדיקטור עבור המאורע שהפסוקית ה־r מסתפקת, ומסמנים ב־$X = \sum_{r=1}^{m} X_r$ את המ"מ עבור מספר הפסוקיות המסתפקות.

מכיוון שסדרת הערכים $\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)$ מקבלת את כל אחד מ־$3! = 6$ הסדרים האפשריים בהסתברות זהה (צמצום של סדר מקרי שנבחר יוניפורמית לחלק מהאיברים הוא בעצמו סדר מקרי יוניפורמי), ויש רק מקרה אחד שבו הפסוקית לא מסתפקת, מקבלים $\mathrm{E}[X_r] = \frac{5}{6}$ לכל $1 \leq r \leq m$, ולכן $\mathrm{E}[X] = \frac{5}{6}m$. מכאן שבהסתברות גדולה מ־0 מתקיים $X \geq \frac{5}{6}$ כנדרש.

על מנת למצוא פרמוטציה כזו באופן דטרמיניסטי, נשתמש בשיטת התוחלות המותנות. הנוסחאות לתוחלות המותנות יהיו פשוטות יותר אם נבחר בשלבים את הפרמוטציה ההפוכה σ^{-1} במקום את σ. בשלב הראשון נבחר את $\sigma^{-1}(1)$, ז"א את i_1 עבורו מתקיים $\sigma(i_1) = 1$, בשלב השני את $\sigma^{-1}(2)$, וכו'. בשלב ה־s נבחר את $i_s = \sigma^{-1}(s)$, ונבחר את זה שייתן מקסימום לתוחלת המותנת המתאימה $\mathrm{E}[X|\sigma(i_1) = 1, \ldots, \sigma(i_s) = s]$. את החישוב הזה עושים לפי הסכום $\sum_{r=1}^{m} \mathrm{E}[X_r|\sigma(i_1) = 1, \ldots, \sigma(i_s) = s]$.

חישוב הסתברות מותנה בודדת $\Pr[\neg(\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k))|\sigma(i_1) = 1, \ldots, \sigma(i_s) = s]$ נעשה באופן הבא:

- אם אף אחד מהמספרים i, j, k אינו איבר בסדרה $i_1, \ldots, i_s$, ההסתברות לסיפוק היא עדיין $\frac{5}{6}$.
- אם רק i איבר בסדרה, אז מכיוון ש־$\sigma(i)$ בטוח יהיה יותר קטן מ־$\sigma(j)$ ו־$\sigma(k)$ שעוד לא נבחרו, ההסתברות לסיפוק היא $\frac{1}{2}$.
- אם i אינו איבר ב־$i_1, \ldots, i_s$ אבל לפחות אחד מ־j ו־k כן איבר שם, אז ההסתברות לסיפוק היא 1, כי בטוח ש־$\sigma(i)$ לא יהיה קטן משני הערכים האחרים. באופן דומה, אם j אינו איבר בסדרה אבל k כן איבר בה, אז ההסתברות לסיפוק היא 1.
- אם i נמצא בסדרה לפני j (ז"א שבטוח $\sigma(i) < \sigma(j)$) ו־k אינו בסדרה (ואז הערך $\sigma(k)$ יהיה גדול מהם), אז ההסתברות לסיפוק היא 0.
- אם i נמצא בסדרה אחרי j (ואז $\sigma(i) > \sigma(j)$) אז ההסתברות היא 1. מצב דומה קורה אם k נמצא בסדרה כאשר לפחות אחד מ־i ו־j נמצאים בסדרה אחריו.
- המקרה היחידי שנותר הוא כאשר i נמצא בסדרה לפני j בעוד ש־k נמצא בסדרה אחרי שניהם, ואז הסתברות הסיפוק היא 0.

הערה: היה אפשר לגשת בשיטה יותר "ברוטלית" לחישוב התוחלות המותנות. למשל, אם בוחרים את σ במקום את σ^{-1} איבר־איבר, אז במקום לתת נוסחה "סגורה" עבור $\mathrm{E}[X_r|\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(s) = i_s]$ (שהיא טיפה יותר מסובכת מזו שיוצאת מבחירת σ^{-1} שנכתבה למעלה), אפשר פשוט "לרוץ" על כל הערכים האפשריים עבור המשתנים ה"פנויים" בפסוקית ה־r (יש לא יותר משלושה משתנים כאלו, ואם שלושתם פנויים אז התוחלת המותנית היא $\frac{5}{6}$ ללא צורך בחישוב נוסף), ולספור בכמה מהאפשרויות הפסוקית מסתפקת. זה עדיין עונה על דרישות השאלה (כי דרשנו זמן ריצה פולינומי אבל לא הגבלנו את דרגת הפולינום), אבל בזבזני למדי – זמן הריצה יהיה $O(mn^4)$, בעוד שהאלגוריתם למעלה הוא בעל זמן ריצה $O(mn^2)$ באופן שנכתב.

תתי מרחב עם מרחק

ראשית נבחן מה קורה כאשר מגרילים באופן יוניפורמי ובה"ת סדרת וקטורים $\{v_1,\ldots,v_{n/2}\}$ מתוך $(\mathbb{Z}_2)^n$. עבור כל $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n/2}\in\mathbb{Z}_2$, אם לא כולם שווים ל־$0$ אז הקומבינציה הלינארית המתאימה $\sum_{i=1}^{n/2}\alpha_i v_i$ מתפלגת בעצמה (התפלגות לא־מותנה) כמו וקטור שנבחר באופן יוניפורמי מהמרחב. ניתן אם כן להשתמש בחסימת סטיות גדולות, ולקבל שהסיכוי שיהיו פחות מ־$n/20$ ערכי "1" בקומבינציה הזו חסום ע"י $e^{-2n(9/20)^2}<2^{-5n/9}$ (השתמשנו כאן בגרסה השניה מההרצאה, עם $a=9n/20$). מכיוון שיש $2^{n/2}-1$ ערכים אפשריים לסדרה $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n/2}$, מתקבל שבהסתברות $1-o(1)$ כל הקומבינציות הלא־טריביאליות של הווקטורים מכילות יותר מ־$n/20$ ערכי "1". בפרט זה אומר שבהסתברות הזו כל הווקטורים הם ב"ת, והמרחב הנפרש על־ידם הוא ממרחק לפחות $n/20$.

עתה נראה מה קורה כאשר מגרילים את תת המרחב $V\subset(\mathbb{Z}_2)^n$ באופן מקרי ויוניפורמי מכל תתי המרחבים ממימד $n/2$ בדיוק. ראשית שימו לב שההתפלגות של $\mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_{n/2}\}$ כאשר מתנים אותה על כך שהווקטורים האלו הם ב"ת לינארית (מאורע שקורה כזכור בהסתברות $1-o(1)$), היא בדיוק כמו זו של V. כמו כן, הוכחנו שבהסתברות $1-o(1)$, המרחב $\mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_{n/2}\}$ הוא ממרחק לפחות $n/20$. על כן המרחב V הוא בהסתברות $1-o(1)$ ממרחק לפחות $n/20$ (ראו את שתי השאלות הראשונות בפרק "מרחק בין התפלגויות" בחוברת השאלות הפתורות, אשר הועברו גם בתרגול).

הדבר השני לשים לב הוא שגם המרחב הדואלי $V^\perp$ מתפלג באופן יוניפורמי מעל כל תתי המרחבים האפשריים של $(\mathbb{Z}_2)^n$, מכיוון שיש התאמה חח"ע בין כל מרחב לבין הדואלי שלו (אפשר למשל להראות שמתקיים $(V^\perp)^\perp=V$ ישירות מההגדרות וממשפט המימד). על כן בהסתברות $1-o(1)$ המרחב $V^\perp$ הוא ממרחק לפחות $n/20$, וע"פ איחוד מאורעות יוצא שבהסתברות $1-o(1)$ הדבר קורה ל־V ול־$V^\perp$ בו זמנית.

מהמר עם זמן

נניח שקיים מרטינגל $X_0,X_1,\ldots$ כזה עבור קבוע C מתאים. לפי תנאי השאלה, בפרט קיים N כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $\Pr[X_n=1]>C/(C+1)$. אבל אז בפרט $\Pr[X_n<0]<1/(C+1)$, ומתקיים כזכור $X_n\geq -C$ תמיד. סכימה אם כך תתן לנו $\mathrm{E}[X_n]>0$, אולם זוהי סתירה, מכיוון שבמרטינגל מתקיים $\mathrm{E}[X_n]=\mathrm{E}[X_0]$, וכזכור הנחנו שמתקיים $X_0=0$ תמיד.

מרטינגל עם חריגות

מכיוון שאפשר להגיש את השאלה גם עם התרגיל הרביעי, לא ניתן כאן את הפתרון שלה.

פתרונות לתרגיל הרביעי

עוד על K_4 בגרף מקרי

נפתור את השאלה באמצעות אי־שוויון ינסון מתוך פרק הפרדיגמה של פואסון בתרגול. לכל רביעיית צמתים $1 \le i < j < k < l \le n$ (כזכור קבוצת הצמתים של $G(n,p)$ היא $V = \{1,\ldots,n\}$), נסמן ב־$B_{i,j,k,l}$ את המאורע שאלו מהווים קליק בגרף. בסימונים של אי־שוויון ינסון, מתקיים $\{i,j,k,l\} \sim \{i',j',k',l'\}$ אם ורק אם יש לשתי הקבוצות בין 2 ל־3 איברים משותפים. אצלנו $p = \alpha n^{-2/3}$, ונוכל לחשב עתה $M = \prod_{1\le i<j<k<l\le n} \Pr[\neg B_{i,j,k,l}] = (1-\alpha^6 n^{-4})^{\binom{n}{4}}$, וזה שואף ל־$e^{-\alpha^6/4!}$. בפרט קיים $\delta > 0$ כך שעבור n גדול דיו מתקיים $\delta < M < 1 - 3\delta$. כמו כן, בחישוב דומה לזה שעשינו עבור חסימת השונות בפרק על פונקציית סף לקיום K_4, מקבלים $\Delta = \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\alpha^{11}n^{-22/3} + \binom{n}{3}(n-3)(n-4)\alpha^9 n^{-6} = o(1)$, ולכן עבור n גדול דיו מתקיים גם $\Pr[B_{i,j,k,l}] < \frac{1}{2}$ (לכל i,j,k,l) וגם $e^{\Delta} < 1 + \delta$. לסיכום (עם הצבת $\epsilon = \frac{1}{2}$ באי־שוויון ינסון) מקבלים $\delta < M \le \Pr[\bigwedge_{1\le i<j<k<l\le n} \neg B_{i,j,k,l}] \le Me^{\Delta} < 1 - \delta$, שזה מה שרצינו להוכיח (זה אותו דבר אם מוכיחים את זוג החסמים לקיום קליק או לאי־קיום קליק, כפי שעשינו).

נחתכים ולא מכסים

נגדיר שתי משפחות נוספות של תתי־קבוצה של $S = \{1,\ldots,n\}$. המשפחה $\mathcal{A}$ תוגדר כמשפחת כל הקבוצות המוכלות באיבר כל שהוא של $\mathcal{F}$, והמשפחה $\mathcal{B}$ תוגדר כמשפחת כל הקבוצות המכילות איבר כל שהוא של $\mathcal{F}$. בפרט חייב להתקיים $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (אבל לא בהכרח מתקיים שוויון), כי כל איבר של $\mathcal{F}$ בפרט מוכל בעצמו, וכן מכיל את עצמו.

עתה נחסום את הגדלים של המשפחות החדשות. עבור תת־קבוצה A כל שהיא של S, לא ייתכן שגם $A \in \mathcal{A}$ וגם $S \setminus A \in \mathcal{A}$, מכיוון שאחרת היינו יכולים לקחת את האיבר של $\mathcal{F}$ שמכיל את A ואת האיבר של $\mathcal{F}$ שמכיל את $S \setminus A$, והאיחוד של שני אלו היה שווה ל־S כולה, בסתירה להנחות. על כן הגודל של $\mathcal{A}$ הוא לכל היותר 2^{n-1}, כי מכל זוג אפשרי של קבוצה והמשלימה שלה לכל היותר אחד מהם יהיה ב־$\mathcal{A}$.

באופן דומה הגודל של $\mathcal{B}$ חסום ע"י 2^{n-1}, כי אם גם B וגם $S \setminus B$ יהיו ב־$\mathcal{B}$, ע"י לקיחת איברי $\mathcal{F}$ המוכלים באלו נקבל סתירה להנחה שאין ב־$\mathcal{F}$ זוג איברים עם חיתוך ריק.

לבסוף, נשים לב ש־$\mathcal{A}$ היא משפחה מונוטונית לא־עולה מעצם הגדרתה (היא מוגדרת כ"משפחת כל הקבוצות המוכלות במשהו"), בעוד ש־$\mathcal{B}$ היא מונוטונית לא־יורדת. מכאן שאפשר להשתמש במשפט קלייטמן ולקבל $2^n|\mathcal{A}\cap\mathcal{B}| \le |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$, ולכן $|\mathcal{F}| \le |\mathcal{A}\cap\mathcal{B}| \le 2^{n-2}$ כנדרש.

באשר לדוגמה ל־$\mathcal{F}$ מגודל 2^{n-2} בדיוק, אפשר לקחת את משפחת כל תתי־הקבוצה המכילות את האיבר "1" אולם אינן מכילות את האיבר "2".

טעם לפגם

ראשית נזכיר את אי־שוויון פינסקר: עבור כל שני מרחבי הסתברות μ ו־ν מעל אותה קבוצת בסיס בדידה S, מתקיים $d(\mu,\nu) \le \sqrt{\frac{1}{2}D(\mu\|\nu)}$, כאשר d הוא המרחק בין ההתפלגויות ו־D הוא מרחק האנטרופיה היחסית.

עבור השאלה, ראשית נפתח את $\mathrm{H}[\mu]$ במושגים של $|S|$ ו־$D(\mu\|\pi)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}[\mu] = -\sum_{s\in S}\mu(s)\log(\mu(s)) \;&=\; -\sum_{s\in S}\mu(s)\log(\mu(s)\cdot\frac{1}{|S|}\cdot|S|) \\
&=\; -\sum_{s\in S}\mu(s)\log(\frac{1}{|S|}) - \sum_{s\in S}\mu(s)\log(\mu(s)\cdot|S|) = \log(|S|) - D(\mu\|\pi)
\end{aligned}$$

כל שנותר הוא להציב את אי השוויון $D(\mu\|\pi) \geq 2(d(\mu,\pi))^2$ הנובע מהעברת אגפים באי־שוויון פינסקר, וקיבלנו את המבוקש.

מרטינגל עם חריגות

לא חסרות דוגמאות. דוגמה פשוטה: מתחילים ממשתנים מקריים ב"ת $Y_1,\ldots,Y_m$, כאשר כל Y_j יהיה שווה ל־1 בהסתברות $\frac{10m-1}{10m} = 1-\frac{1}{10m}$ ושווה ל־$1-10m$ בהסתברות $\frac{1}{10m}$ (לא קשה לוודא שאלו מ"מ עם תוחלת 0). מאלו מגדירים $X_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$ לקבלת המרטינגל. בפרט $X_i = X_{i-1}+1$ בהסתברות $1-\frac{1}{2m} > \frac{10m-1}{10m}$, ומתקיים גם $\frac{2}{3} > \frac{9}{10} \geq (1-\frac{1}{10m})^m = \Pr[X_m = m]$.