# תרגיל ראשון   הגשה: 8.4.2020

תרגיל קצר זה קשור למטלת הקריאה הראשונה של הקורס – הפרק הראשון מתוך חוברת לקט התרגילים של הקורס "שיטות הסתברותיות ואלגוריתמים".

במהלך כל הקורס, פתרונות התרגילים שאתם מגישים צריכים להכיל הוכחות מלאות (אלא אם כן נאמר אחרת). מותר לצטט טענה שנלמדה בקורס מבלי להוכיח אותה מחדש, וזה כולל גם את התרגילים בהסתברות שקראתם עליהם במטלת הקריאה הנ"ל.

### לא משנה עם או בלי (3 נקודות)

נסתכל על שתי התפלגויות עבור פונקציות $f:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}$ כאשר $k\le n$. בהתפלגות $\nu$, בוחרים את $f$ להיות פונקציה מקרית באופן יוניפורמי מכל האפשרויות (זה כמו לבחור כל ערך $f(j)\in\{1,\ldots,n\}$ של הפונקציה באופן יוניפורמי וב"ת בערכים האחרים שלה). בהתפלגות $\tau$, בוחרים את $f$ להיות פונקציה מקרית באופן יוניפורמי מכל האפשרויות עבור פונקציה חח"ע (יש $n!/(n-k)!$ אפשרויות כאלו, כל אחת מהן יכולה להיבחר בהסתברות $(n-k)!/n!$ בדיוק).

הראו שעבור $k\le n^{1/3}$, מתקיים $\mathrm{dist}(\nu,\tau)=o(1)$, ז"א שה־variation distance בין שתי ההתפלגויות חסום מלמעלה ע"י פונקציה של $n$ ששואפת ל־0.

### כן משנה עם או בלי (3 נקודות)

שוב נסתכל על ההתפלגויות $\nu$ ו־$\tau$ שהוגדרו עבור פונקציות $f:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}$, רק שהפעם נתון שמתקיים $k\ge n^{2/3}$. הראו שבמקרה זה מתקיים $\mathrm{dist}(\nu,\tau)=1-o(1)$.

## תרגיל שני   הגשה: 22.4.2020

### לפחות את זה (6 נקודות)

נתונה תכונה של פונקציות $f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$, כך שלכל $n$ גדול מספיק, קיימת גם פונקציה $g$ שמקיימת את התכונה, וגם פונקציה $h$ שהיא $\alpha$־רחוקה מהתכונה, עבור $\alpha>0$ קבוע. הראו שלכל $\epsilon$, אלגוריתם $\epsilon$־בדיקה עבור התכונה הנתונה חייב לבצע לפחות $\Omega(\alpha/\epsilon)$ שאילתות, לכל $n$ גדול מספיק.

## תרגיל שלישי הגשה: 13.5.2020

### עבריינות מושלמת (6 נקודות)

נתון ש־$D$ הוא סדר חלקי עם $d$ איברים. הראו שקיימת פונקציה $f: D \to \{1, \ldots, d\}$ שמפרה כל זוג אפשרי בסדר החלקי. זה אומר שלכל $a, b \in D$, אם $a < b$ לפי הסדר החלקי (הסימון "$a < b$" פירושו שמתקיים $a \leq b$ לפי הסדר וכן $a \neq b$), אז מתקיים $f(a) > f(b)$.

### שרשור פלינדרומים (6 נקודות)

נסתכל על התכונה של כל המחרוזות שהן שרשור של שני פלינדרומים מעל $\{0, 1\}$. התכונה הזו מופיעה בדוגמה לשימוש בשיטת יאו שנלמד בהמשך הקורס, אבל בשביל שאלה זו מספיק לדעת את ההגדרה שלה:

אנחנו נגיד שמחרוזת $w_1, \ldots, w_n \in \{0, 1\}^n$ מקיימת את התכונה, אם קיים $1 \leq k \leq n$ שעבורו $w_1, \ldots, w_k$ הוא פלינדרום (ז"א $w_i = w_{k+1-i}$ לכל $1 \leq i \leq k$) וכן $w_{k+1}, \ldots, w_n$ הוא פלינדרום. המקרה $k = n$ גם אפשרי, אז פשוט נגיד שהפלינדרום השני בשרשור הוא מאורך 0.

הראו שניתן לבצע $\epsilon$־בדיקה לתכונה זו ב־$O(\sqrt{n \log(n)/\epsilon})$ שאילתות.

## תרגיל רביעי   הגשה: 3.6.2020

### איתור מפירים (8 נקודות)

שאלה זו עוסקת בבדיקת מונוטוניות של פונקציות $f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$. חשוב לשים לב שהטווח כאן הוא של שני איברים בלבד. הראו שאם $f$ היא פונקציה $\epsilon$־רחוקה ממונוטוניות, אז שני הדברים הבאים מתקיימים (מותר להניח ש־$n$ גדול מספיק).

- אם בוחרים באופן יוניפורמי $q$ אינדכסים מ־$\{1,\ldots,n\}$, עבור $q=O(1/\epsilon)$ מתאים, אז בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ יהיו בתוכם לפחות שני אינדכסים שמהווים זוג מפר.
- אם בוחרים זוג בודד של אינדכסים מ־$\{1,\ldots,n\}$ באופן יוניפורמי, אז בהסתברות $\Omega(\epsilon^2)$ הוא יהיה זוג מפר.

הערה – אלגוריתם שבנוי לפי הסעיף הראשון אכן יהיה יותר יעיל מאשר חזרה על בדיקת זוג בודד כל פעם לפי הסעיף השני.

### חסם לזוגות (4 נקודות)

הראו (עבור $n$ גדול מספיק ו־$\epsilon$ קטן מקבוע מתאים) שבאמת קיימת פונקציה $f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$ שהיא $\epsilon$־רחוקה ממונוטוניות, ואם בוחרים זוג אינדכסים מתוך $\{1,\ldots,n\}$ באופן יוניפורמי, אז הוא יהיה זוג מפר בהסתברות $O(\epsilon^2)$ בלבד.

## תרגיל חמישי   הגשה: 30.6.2020

### איפכא מסתברא (6 נקודות)

בשאלה זו הקלט מורכב משתי פונקציות $f, g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. שאילתה יכולה להיות בירור הערך $f(i)$ או בירור הערך $g(j)$, והמרחק של הקלט מתכונה מסויימת היא לפי מספר המקומות הכולל שבהם צריכים לשנות את הפונקציות על מנת לגרום להם לקיים את התכונה, מחולק ב־$2n$ (מספר הערכים הכולל של שתי הפונקציות).

התכונה שנרצה לבדוק היא ש־$g$ היא ההופכית של $f$, ז"א שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים $g(f(i)) = i$. הראו שקיים אלגוריתם אדפטיבי שמבצע $\epsilon$־בדיקה לתכונה זו ב־$O(1/\epsilon)$ שאילתות.

### מסתברא איפכא (6 נקודות)

הראו שאלגוריתם לא־אדפטיבי עבור אותה תכונה של השאלה הקודמת, לא יכול לבצע אפילו $\frac{1}{4}$־בדיקה אלא אם כן הוא מבצע $\Omega(\sqrt{n})$ שאילתות לפחות (לא צריך להראות שבאמת יש אלגוריתם כזה עם $O(\sqrt{n})$ שאילתות, למרות שגם זה נכון).

## תרגיל שישי   הגשה: 4.8.2020

התרגיל הזה מתרכז בדוגמה של בדיקת תכונות באמצעות למידה.

### כמעט אחידות (9 נקודות)

השאלה עוסקת במטריצות בוליאניות, המיוצגות ע"י פונקציות $f:\{1,\ldots n\}^2\to\{0,1\}$. נסתכל על חלוקה לקטעים של $\{1,\ldots,n\}$: נתרכז בחלוקה $\mathcal{B}_r=\{I_{r,1},\ldots,I_{r,r}\}$ עבור $I_{r,j}=\{\lceil\frac{j-1}{r}n\rceil+1,\ldots,\lceil\frac{j}{r}n\rceil\}$ (זוהי חלוקה ל־$r$ קטעים עם אורכים שווים עד כמה שניתן).

אנחנו נגיד שמטריצת הקלט היא $(\epsilon,r)$־אחידה אם לכל הזוגות $(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2$, פרט אולי לכל היותר $\epsilon r^2$ מהם, מתקיים ש־$f|_{I_{r,i}\times I_{r,j}}$ היא פונקציה קבועה (או הכל $0$ או הכל $1$).

כתבו (והוכיחו) קיום של אלגוריתם $4\epsilon$־למידה עם מספר שאילתות פולינומי ב־$r$ ו־$1/\epsilon$ (לא תלוי $n$) עבור מטריצה $(\epsilon,r)$־אחידה, כאשר $n$ גדול מספיק (מספיק למשל $n>10r$). נזכיר מה צריך להתקיים:

- אם המטריצה היא $(\epsilon,r)$־אחידה אז בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ האלגוריתם חייב לפלוט מטריצה $g$ שהיא $4\epsilon$־קרובה ל־$f$.
- בכל מקרה, ההסתברות לפלוט מטריצה $g$ שאינה $4\epsilon$־קרובה ל־$f$ קטנה מ־$\frac{1}{3}$ (אבל עבור מטריצות לא אחידות מותר לפלוט "$\perp$" בכל הסתברות שהיא).

### בדיקה באמצעות למידה של מונוטוניות (9 נקודות)

שאלה זו משתמשת בסימונים של השאלה הקודמת, ואפשר (וצריך) להשתמש בתוצאה של השאלה הקודמת גם אם לא פתרתם אותה.

הראו שאם $f:\{1,\ldots,n\}^2\to\{0,1\}$ היא מונוטונית, ז"א שלכל $i\le i'$ ו־$j\le j'$ מתקיים $f(i,j)\le f(i',j')$, אז הפונקציה היא $(2/r,r)$־אחידה לכל $r<n$. הראו שכתוצאה מזה ומאלגוריתם הלמידה של השאלה הקודמת, ניתן לבדוק את המונוטוניות של $f$ במספר שאילתות פולינומי ב־$\epsilon$ (לא תלוי $n$).

הערה – יש שיטות יותר יעילות לבדוק מונוטוניות של מטריצות כאלו, אבל השיטה של בדיקה באמצעות למידה עובדת גם עבור תכונות אחרות שגורמות לאחידות של המטריצה, כמו למשל התכונה "הקבוצה המוגדרת ע"י $\{(i,j):f(i,j)=1\}$ היא קמורה".