תרגיל ראשון   הגשה: 19.11.2019

בחירה בלי מגוון (4 נקודות)

עבור k ו־c שלמים חיוביים קבועים, וקבוצה A עם n איברים, נתונה צביעה $f: A \to \{1, \ldots, c\}$. נסמן את משפחת כל תתי הקבוצה בנות k איברים של A בסימון $\binom{A}{k} = \{B \subset A : |B| = k\}$. הראו שקיים מרחב הסתברות μ מעל $\binom{A}{k} \cup \{\emptyset\}$ (חישבו על זה כעל בחירה של k איברים בלי חזרות עם אפשרות ל"כישלון"), שמקיים את המאפיינים הבאים עבור קבוצה K שנבחרת לפי μ:

- לכל $a \in A$ מתקיים $\Pr_\mu[a \in K] \le k/n$ (הבחירה "מרגישה באופן מקומי" כמו בחירה יוניפורמית של k איברים מ־A).
- בהסתברות 1, כל האיברים של K מקבלים ערכים זהים של f (זה נכון באופן ריק כאשר $K = \emptyset$, אבל אנחנו רוצים באופן כללי התפלגות מעל תתי קבוצות "מונוכרומטיות").
- לכל $\epsilon > 0$ קיים $N(c, k, \epsilon)$ (תלוי גם ב־c ו־k), כך שאם $|A| = n \ge N$ אז $\Pr_\mu[K = \emptyset] \le \epsilon$ (עבור c, k קבועים ו־n גדול, הסיכוי לכישלון בבחירה הוא $o(1)$).

מרחב הסתברות בסגנון רמזי (8 נקודות)

עבור k ו־c שלמים חיוביים קבועים, נתונה צביעה ב־c צבעים של קשתות הגרף הדו־צדדי המלא עם n צמתים בכל צד. באופן פורמלי, נתונות קבוצות הצמתים הזרות U, V שעבורן $|U| = |V| = n$, ונתונה הצביעה $f : U \times V \to \{1, \ldots, c\}$ של כל הזוגות האפשריים. הראו שקיים מרחב הסתברות ν מעל תתי־גרפים מושרים, ז"א מרחב שבוחר $X \subset U$ ו־$Y \subset V$, שמקיים את המאפיינים הבאים:

- תמיד $(X, Y) \in \binom{U}{k} \times \binom{V}{k} \cup (\emptyset, \emptyset)$ (או שבוחרים k צמתים מכל קבוצה או ש"נכשלים").
- תמיד כל האיברים של $X \times Y$ מקבלים ערכים זהים של f (תמיד מתקבלים תתי־גרפים "מונוכרומטים", כמו במשפט רמזי).
- לכל $u \in U$ ו־$v \in V$ מתקיים $\Pr_\nu[u \in X \wedge v \in Y] \le k^2/n^2$ (מבחינת הקשתות של הגרף, הבחירה "מרגישה באופן מקומי" כמו בחירה יוניפורמית של X ו־Y).
- לכל $\epsilon > 0$ קיים $M(c, k, \epsilon)$ (תלוי גם ב־c ו־k), כך שאם $n \ge M$ אז $\Pr_\nu[(X, Y) = (\emptyset, \emptyset)] \le \epsilon$ (עבור c, k קבועים ו־n גדול, הסיכוי לכישלון הוא $o(1)$).

הערה: מותר להשתמש בתוצאת השאלה "בחירה בלי מגוון" גם אם לא פתרתם אותה.

הדרכה: חישבו קודם על מרחב הסתברות של זוגות (X', Y) שבו מתקיים שעבור כל צומת $u \in X'$, האיברים של $\{u\} \times Y$ מקבלים כולם ערכים זהים של f. חישבו איך מגיעים לזוג כזה, ואיך מגיעים ממנו לזוג (X, Y).

וקטורים בהגרלה (6 נקודות)

בשאלה זו נדון במרחבים לינאריים מעל השדה $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (עם חיבור וכפל מודולו 2). מגרילים באופן מקרי, יוניפורמי, וב"ת סדרת וקטורים $v_1, \ldots, v_n \in (\mathbb{Z}_2)^n$. הראו שבסיכוי חסום מלמטה ע"י קבוע גדול מאפס, הווקטורים האלו יהיו בלתי־תלויים (ובפרט יהוו בסיס של המרחב).

הערה: אפשר לקבל ניקוד חלקי אם אתם חוסמים רק את הסיכוי ש־$v_1, \ldots, v_{n-1}$ הם ב"ת.

תרגיל שני   הגשה: 24.12.2019

לא אי שוויון מרקוב (3 נקודות)

הראו שלכל קבועים $\alpha, \beta > 0$ קיימת התפלגות של משתנה מקרי X עם התכונות הבאות: ערכי X הם מספרים שלמים אי־שליליים, ההתפלגות שלו מונוטונית לא־עולה (לכל i מתקיים $\Pr[X = i] \geq \Pr[X = i + 1]$), התוחלת שלו עולה על β, ובכל זאת מתקיים $\Pr[X > 0] < \alpha$.

קודים חסרי רישות (6 נקודות)

קוד חסר רישות הוא קבוצה של מחרוזות סופיות $C \subset \{0,1\}^*$, כך שלא קיימת מילה $u \in C$ עם רישה שהיא גם ב־C (ז"א שאם $u = u_1 \cdots u_k \in C$, אז לא קיים $i < k$ שעבורו $u_1 \cdots u_i \in C$ – בפרט, אם $|C| > 1$ אז המילה הריקה אינה יכולה להיות ב־C). הראו את הגרסה הבאה של אי־שוויון קראפט: אם C סופי ו־μ מרחב הסתברות מעל C, אז קיימת מילה $w \in C$ שעבורה $\Pr_\mu[w] \geq 2^{-|w|}$.

רמז: אם n האורך המקסימלי של מילה ב־C, נתחו את מרחב ההסתברות מעל $\{0,1\}^n$ שמתקבל מלקיחת מילה מקרית לפי μ והשלמה שלה למילה מאורך n באמצעות בחירה יוניפורמית וב"ת של התווים הנותרים.

מן הקטן לגדול (4 נקודות)

נניח ש־$G = (V, E)$ הוא גרף מכוון עם n צמתים, ונניח שעבור מספר טבעי $k \leq n/2$ הגרף מקיים שאם U ו־W הן קבוצות צמתים כל שהן זרות מגודל k **בדיוק** כל אחת, אז מספר הקשתות היוצאות מ־U ומגיעות ל־W נמצא בטווח $(\frac{1}{2} \pm \alpha)k^2$ עבור $\alpha > 0$ מתאים. הראו שהגרף מקיים גם שאם U ו־W הן קבוצות צמתים זרות כל שהן מגודל **לפחות** k כל אחת, אז מספר הקשתות מ־U ל־W נמצא בטווח $(\frac{1}{2} \pm \alpha)|U| \cdot |W|$.

מנצחים ומפסידים (9 נקודות)

תחרות היא גרף מכוון $G = (V, E)$ שבה לכל זוג צמתים (לא זהים) $u, v \in V$ בדיוק אחת מהקשתות uv או vu תהיה ב־E. הראו שעבור כל $\alpha > 0$ קיימים $C(\alpha)$ ו־$N(\alpha)$, כך שלכל $|V| = n$ זוגי גדול מ־$N(\alpha)$ קיימת תחרות עם התכונות הבאות:

- אם U, W קבוצות צמתים זרות מגודל לפחות $C \log(n)$ כל אחת, אז מספר הקשתות מצומת של U לצומת של W הוא בתחום $(\frac{1}{2} \pm \alpha)|U||W|$.
- מספר הצמתים ב־V שיש להם יותר קשתות יוצאות מקשתות נכנסות ("צמתים מנצחים") הוא בתחום $(\frac{1}{2} \pm \alpha)n$.

הערה: מותר להשתמש בתוצאת השאלה "מן הקטן לגדול" (כן, גם אם לא פתרתם אותה), אבל לא חייבים.

תרגיל שלישי (גרסה מתוקנת) הגשה: 23.1.2020

פסוקיות בסדר (6 נקודות)

בשאלה זו נדבר על מערכת של m פסוקיות, כמו מערכות 3CNF שנידונו בשיעור, אבל כאן, במקום למצוא הצבה ב־n משתנים בוליאנים, צריך למצוא פרמוטציה (פונקציה חח"ע ועל) $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, והפסוקיות שלנו מתייחסות לסדר שהפרמוטציה קובעת על המספרים. ספציפית, כל פסוקית היא מהצורה "$\neg(\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k))$" עבור $1 \le i,j,k \le n$ שונים זה מזה. הכוונה היא שהפסוקית הזו מסתפקת בכל מקרה **למעט** המקרה שבו הפרמוטציה σ גם נתנה ל־i ערך קטן מזה שנתנה ל־j, וגם נתנה לשני אלו ערך קטן מזה שנתנה ל־k. הראו שקיימת פרמוטציה שמספקת בו זמנית לפחות $\frac{5}{6}m$ מתוך m הפסוקיות, וכתבו אלגוריתם דטרמיניסטי (עם זמן ריצה פולינומי ב־m ו־n) שמוצא פרמוטציה כזו. עליכם לתת את האלגוריתם בשלמותו. למשל, אם יש שלב שבו אתם כותבים "ואז מחשבים את...", עליכם לכתוב בבירור מהו הביטוי המתמטי שמחשבים.

תתי מרחב עם מרחק (9 נקודות)

שאלה זו עוסקת במרחבים לינאריים מעל השדה $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. עבור תת־מרחב $V \subseteq (\mathbb{Z}_2)^n$ נגדיר את המרחק $\mathrm{dist}(V) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} |\{i : v_i = 1\}|$. במילים אחרות, המרחק הוא המספר המינימלי של "1" באיברים של V פרט לאיבר ה־0. לא קשה לראות שזהו גם מרחק האמינג המינימלי בין כל שני וקטורים שונים זה מזה ב־V.

עבור תת־מרחב לינארי V נגדיר גם את המרחב הדואלי: עבור זוג וקטורים $u,v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ מגדירים את ה"מכפלה הפנימית מודולו 2" לפי $u \cdot v = \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}}(u_i v_i)$ (הסימון "$\bigoplus$" הוא של חיבור מודולו 2, או פעולת "XOR"). המרחב הדואלי $V^\perp$ הוא מרחב כל הווקטורים $u \in (\mathbb{Z}_2)^n$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $u \cdot v = 0$. לא קשה לראות שבפרט מתקיים $\dim(V) + \dim(V^\perp) = n$ (אפשר לבנות מטריצה שהשורות שלה הן בסיס ל־V ולהשתמש במשפטים מאלגברה לינארית), ומותר לכם להשתמש בזה גם בלי הוכחה.

הראו שעבור כל n זוגי גדול דיו קיים תת מרחב $V \subset (\mathbb{Z}_2)^n$ ממימד $n/2$ בדיוק, כך שגם $\mathrm{dist}(V)$ וגם $\mathrm{dist}(V^\perp)$ הם מסדר גודל $\Theta(n)$.

הערה: תתי המרחב האלו חשובים בתורת הקידוד. הגודל של $\mathrm{dist}(V)$ הופך מרחב כזה לקוד לינארי עמיד בשגיאות. הגודל של $\mathrm{dist}(V^\perp)$ (המרחק הדואלי של הקוד) גורם לזה שאם בוחרים איבר מקרי ומצמצמים אותו לקבוצה קטנה מספיק של קואורדינטות, הצמצום המתקבל מתנהג כמו סדרת מ"מ יוניפורמים ב"ת.

רמז: חישבו מה קורה אם מגרילים באופן מקרי, אחיד ובלתי תלוי את הווקטורים $v_1,\dots,v_{n/2}$, ומגדירים את המרחב $V = \mathrm{span}\{v_1,\dots,v_{n/2}\}$. חישבו גם מה קורה אם מגרילים את הווקטורים $w_1,\dots,w_{n/2}$ ומגדירים את המרחב $V = (\mathrm{span}\{w_1,\dots,w_{n/2}\})^\perp$.

מהמר עם זמן (3 נקודות)

הראו שלא קיים מרטינגל בעל אורך לא סופי $X_0, X_1, \dots$ שמקיים (בהסתברות 1) את $X_0 = 0$, לכל i מקיים את $X_i \ge -C$ עבור קבוע גלובלי C כל שהוא, ובנוסף מקיים $\lim_{i\to\infty} \Pr[X_i = 1] = 1$ (בהסתברויות לא מותנות). אפשר לחשוב על זה כעל גרסה של "מרטינגל המהמר החכם" מההרצאה, רק שכאן יש למהמר זמן אינסופי ורק התקציב שלו מוגבל (מסתבר שגם ככה אי אפשר להרוויח).

מרטינגל עם חריגות (6 נקודות – מותר גם להגיש את השאלה הזו עם התרגיל הרביעי)

תנו דוגמה למרטינגל $X_0,\dots,X_m$ שמקיים את הדברים הבאים: $X_0 = 0$ בהסתברות 1, לכל $1 \le i \le m$ מתקיים $|X_i - X_{i-1}| \le 1$ בהסתברות לפחות $1 - \frac{1}{2m}$ (הסתברות לא מותנה) ולמרות כל זאת מתקיים $|X_m| > 10\sqrt{m}$ בהסתברות גדולה מ־$\frac{2}{3}$.

תרגיל רביעי   הגשה: 26.2.2020

עוד על K_4 בגרף מקרי (6 נקודות)

נבחן את הגרף המקרי $G(n, \alpha n^{-2/3})$ עבור $\alpha > 0$ קבוע נתון. הראו שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $n > 3$ מתקיים שהסיכוי לכך שקיים K_4 בגרף הוא לפחות δ ולכל היותר $1 - \delta$.

הערות: מובן שמספיק להוכיח את זה עבור n גדול דיו, מכיוון שאז על מנת לטפל בערכי n קטנים יותר אפשר לעשות מינימום של δ עם מספר סופי של אפשרויות. אתם אפילו לא צריכים לציין את זה. כמו כן, בשלב זה של הקורס כבר אפשר לדלג טיפה על חישובים ארוכים (כל עוד נשארים בתחום הנכונות המתמטית).

רמז: אם אתם לא מצליחים להוכיח את זה בשיטה ההסתברותית הצפויה, נסו אחרת.

נחתכים ולא מכסים (6 נקודות)

נתונה משפחה $\mathcal{F}$ של תתי־קבוצה של $S = \{1, \ldots, n\}$, כאשר $n \geq 2$. נתון גם שלכל $A, B \in \mathcal{F}$ מתקיים $A \cap B \neq \emptyset$ וכן $A \cup B \neq S$. הוכיחו ש־$\mathcal{F}$ מכילה לא יותר מ־2^{n-2} קבוצות. כמו כן תנו דוגמה ל־$\mathcal{F}$ אפשרית שזה הגודל שלה בדיוק.

טעם לפגם (6 נקודות)

הערה לפתיחה: השאלה ניתנת לפתירה באמצעות אי־שוויון פינסקר. מומלץ שתקראו עליו, למשל דרך אחת השאלות בחוברת התרגילים הפתורים שגם משתמשת בו.

נתון מרחב הסתברות μ מעל קבוצה סופית S. בנוסף, נסמן ב־π את מרחב ההסתברות היוניפורמי מעל S, וב־$d(\mu, \pi)$ את המרחק (זה הקרוי variation distance, ראו את הפרק הראשון בחוברת התרגילים הפתורים) בין שני מרחבי ההסתברות. הראו שמתקיים $\mathrm{H}[\mu] \leq \log(|S|) - 2(d(\mu, \pi))^2$.

מרטינגל עם חריגות (6 נקודות – לאלו שלא הגישו עדיין)

אלו שלא הגישו את השאלה הזו עם התרגיל השלישי יכולים להגיש אותה כאן.