שיטות הסתברותיות ואלגוריתמים – חוברת התרגילים

1 ביולי 2019

חוברת זו מכילה תרגילים נבחרים מהיסטוריית הקורס ופתרונם. בשעות האימון יוצג מבחר מהתרגילים בחוברת.

מרחק בין התפלגויות

קרבה בין התפלגויות

עבור שתי מידות הסתברות P, Q מעל $[n] = \{1, \ldots, n\}$ נגדיר את המרחק ביניהן לפי $d(P,Q) \triangleq |P - Q| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]|$. בספרות מרחק זה קרוי ה־Variation Distance.

א. הראו שלכל מאורע E מתקיים $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| \leq |P - Q|$.

ב. הראו שקיים E עבורו מתקיים $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| = |P - Q|$.

התפלגויות מותנות

נניח ש־X ו־Y הם שני משתנים מקריים (לא ב"ת) מעל אותו מרחב הסתברות, אשר מקבלים ערכים ב־$\{1, \ldots, n\}$. נניח שקיים מאורע E כך ש־$\Pr[E] \geq 1 - \epsilon$, ושאם E מתקיים אז $X = Y$ (ז"א $\Pr[X = Y|E] = 1$). הראו שהמרחק בין ההתפלגות על ערכי X לבין ההתפלגות על ערכי Y הוא לא יותר מ־ϵ, כלומר הראו כי מתקיים $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\Pr[X = i] - \Pr[Y = i]| \leq \epsilon$.

התפלגויות מותנות – הכיוון השני

נניח ש־$p_1, \ldots, p_n$ ו־$q_1, \ldots, q_n$ הם ווקטורי התפלגות (סדרות של מספרים אי־שליליים שסכומן 1) שעבורם מתקיים $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| = \epsilon$. הראו שקיים מרחב ההסתברות, ושני מ"מ X ו־Y, כך שלכל i מתקיים $\Pr[X = i] = p_i$ ו־$\Pr[Y = i] = q_i$, וכן המאורע $X = Y$ מתקיים בהסתברות $1 - \epsilon$ בדיוק.

מכפלה של הסתברויות

יהי μ מרחב הסתברות על קבוצת המחרוזות הבינאריות מאורך k, המוגדר כך שלכל i הביט ה־i נבחר להיות 1 בהסתברות α_i באופן בלתי תלוי בבחירת הביטים האחרים. יהי ν מרחב הסתברות על אותה קבוצה, המוגדר באופן זהה, פרט לכך שלכל i הביט ה־i נבחר להיות 1 בהסתברות β_i (באופן בלתי תלוי באחרים). הראו שהמרחק (variation distance) בין μ ו־ν הוא לכל היותר $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i|$.

פתרונות לתרגילים על מרחק בין התפלגויות

קרבה בין התפלגויות

א. נסמן ב־$\neg E$ את המאורע המשלים ל־E. מתקיים $\Pr_P[\neg E] - \Pr_Q[\neg E] = \Pr_Q[E] - \Pr_P[E]$, כי $\Pr_P[\neg E] + \Pr_P[E] = \Pr_Q[\neg E] + \Pr_Q[E] = 1$. מכאן מתקבל:

$$\begin{aligned}
|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| &= \frac{1}{2}|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| + \frac{1}{2}|\Pr_P[\neg E] - \Pr_Q[\neg E]| \\
&= \frac{1}{2}|\sum_{i\in E}(\Pr_P[i] - \Pr_Q[i])| + \frac{1}{2}|\sum_{i\notin E}(\Pr_P[i] - \Pr_Q[i])| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i\in E}|\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]| + \frac{1}{2}\sum_{i\notin E}|\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in [n]}|\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]| = d(P,Q)
\end{aligned}$$

ב. נגדיר את $E = \{i \in [n] : \Pr_P[i] > \Pr_Q[i]\}$. במקרה זה מתקיימים

$$\begin{aligned}
|\sum_{i\in E}(\Pr_P[i] - \Pr_Q[i])| = \quad \sum_{i\in E}(\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]) \quad &= \sum_{i\in E}|\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]| \\
|\sum_{i\notin E}(\Pr_P[i] - \Pr_Q[i])| = \quad -\sum_{i\notin E}(\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]) \quad &= \sum_{i\notin E}|\Pr_P[i] - \Pr_Q[i]|
\end{aligned}$$

ולכן מתקבל שוויון בפיתוח למעלה, ז"א $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| = d(P,Q)$.

התפלגויות מותנות

משתמשים בנוסחת ההסתברות השלמה, משפט Bayes ולבסוף באי שוויון המשולש:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr[X=i]-\Pr[Y=i]| &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[(X=i)\wedge E]+\Pr[(X=i)\wedge\neg E] \\
&\qquad -\Pr[(Y=i)\wedge E]-\Pr[(Y=i)\wedge\neg E]\Big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|E]\Pr[E]+\Pr[X=i|\neg E]\Pr[\neg E] \\
&\qquad -\Pr[Y=i|E]\Pr[E]-\Pr[Y=i|\neg E]\Pr[\neg E]\Big| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|E]\Pr[E]-\Pr[Y=i|E]\Pr[E]\Big| \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|\neg E]\Pr[\neg E]-\Pr[Y=i|\neg E]\Pr[\neg E]\Big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|\neg E]-\Pr[Y=i|\neg E]\Big|\Pr[\neg E] \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Pr[X=i|\neg E]+\sum_{i=1}^{n}\Pr[Y=i|\neg E]\right)\Pr[\neg E] \\
&\leq \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\epsilon=\epsilon
\end{aligned}$$

התפלגויות מותנות – הכיוון השני

לכל $1\leq i\leq n$ נגדיר $m_i=\min\{p_i,q_i\}$. מכיוון שמתקיים $|p_i-q_i|=p_i+q_i-2m_i$, מתקיים גם

$$\sum_{i=1}^{n}m_i=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}p_i+\sum_{i=1}^{n}q_i-\sum_{i=1}^{n}|p_i-q_i|)=1-\epsilon$$

עתה צריך לשים לב ששלושת הסדרות המוגדרות באופן הבא הן ווקטורי התפלגות (ז"א שהערכים כולם אי שליליים וסכומם הוא 1).

$$\begin{aligned}
m'_i &= m_i/(1-\epsilon) \\
p'_i &= (p_i-m_i)/\epsilon \\
q'_i &= (q_i-m_i)/\epsilon
\end{aligned}$$

מרחב ההסתברות שלנו יוגדר עתה לפי ערכי המ"מ X ו־Y המוגרלים באופן הבא: בהסתברות $1-\epsilon$ אנו נבחר גם ל־X וגם ל־Y ערך המוגרל מתוך $\{1,\ldots,n\}$ לפי ווקטור ההתפלגות $m'_1,\ldots,m'_n$. בהסתברות הנותרת ϵ אנו נבחר באופן בלתי תלוי ל־X ערך המוגרל לפי $p'_1,\ldots,p'_n$, ול־Y ערך המוגרל לפי $q'_1,\ldots,q'_n$.

כדאי עתה לשים לב שלא קיים i עבורו גם p'_i וגם q'_i אינם אפס (מכיוון ש־m_i שווה לאחד מ־p_i,q_i), ולכן ההסתברות למאורע $X=i\wedge Y=j$ שווה בדיוק ל־m_i אם $i=j$, ושווה ל־$(p_i-m_i)(q_j-m_j)/\epsilon$ אם $i\neq j$. מכאן נובע שההסתברות של המאורע $X=Y$ היא בדיוק $1-\epsilon$.

נותר עוד להוכיח שלמשתנים X ו־Y יש את ההתפלגויות (הבלתי־מותנות) הרצויות. נראה זאת לדוגמה עבור X (עבור Y ההוכחה זהה):

$$\begin{aligned}\Pr[X=i] &= (1-\epsilon)\,m'_i + \epsilon p'_i \\ &= m_i + (p_i - m_i) \\ &= p_i\end{aligned}$$

מכפלה של הסתברויות

אפשר לפתור את השאלה באמצעות חישוב ישיר, אולם במקום זאת נראה כאן דרך המשתמשת בתוצאות שהוכחנו בתרגילים הקודמים. נגדיר מרחב הסתברות על זוגות של מחרוזות $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k$ באופן הבא: לכל i נבחר את x_i ואת y_i באופן ב"ת בבחירות עבור i אחרים (אולם באופן תלוי זה בזה). אם $\alpha_i > \beta_i$ אז בסיכוי β_i נבחר $x_i = y_i = 1$, בסיכוי $\alpha_i - \beta_i$ נבחר $x_i = 1$ ו־$y_i = 0$, ובסיכוי $1-\alpha_i$ נבחר $x_i = y_i = 0$. אם $\alpha_i \leq \beta_i$ אז בסיכוי α_i נבחר $x_i = y_i = 1$, בסיכוי $\beta_i - \alpha_i$ נבחר $x_i = 1$ ו־$y_i = 0$, ובסיכוי $1-\beta_i$ נבחר $x_i = y_i = 0$.

נשים לב עתה שההתפלגות (הלא־מותנה) על $x_1,\ldots,x_k$ זהה ל־μ, וששההתפלגות (הלא־מותנה) על $y_1,\ldots,y_k$ זהה ל־ν. כמו כן, לכל i מתקיים $x_i \neq y_i$ בהסתברות $|\alpha_i - \beta_i|$, ולכן ההסתברות ש־$x_1,\ldots,x_k$ אינה זהה ל־$y_1,\ldots,y_k$ חסומה ע"י $1 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i|$ לפי איחוד מאורעות. מכאן (ע"פ התרגיל על התפלגויות מותנות) נובע שזהו חסם על המרחק בין μ ל־ν.

הערה: אם נשים לב שהמאורעות $x_i \neq y_i$ ב"ת זה בזה, נוכל לחסום את ההסתברות ש־$x_1,\ldots,x_k$ אינה זהה ל־$y_1,\ldots,y_k$ על ידי $\prod_{i=1}^{k}(1-|\alpha_i-\beta_i|)$.

השיטה הבסיסית

חיפוש סופה של רשימה מקושרת

נתונה רשימה מקושרת (linked list) כך שלאיברי הרשימה יש אינדקסים המסודרים בסדר עולה, וכך שיש לאלגוריתם גם את האפשרות לבחירה מקרית של איבר מהרשימה. נסתכל על האלגוריתם הבא למציאת האיבר האחרון:

מתחילים מהאיבר הראשון. בכל שלב בוחרים איבר אקראי בהסתברות אחידה, ומשווים את האינדקס שלו לאינדקס של האיבר העוקב לאיבר שנבחר בשלב הקודם. בוחרים את האיבר בעל האינדקס הגבוה יותר מביניהם עבור השלב הבא. עוצרים כאשר האיבר שנבחר הוא האחרון (אין לו איבר עוקב).

א. הראו שבהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ האלגוריתם יעצור בזמן $O(\sqrt{n})$; הסיקו מכך שתוחלת זמן הריצה היא $O(\sqrt{n})$, כאשר n מסמן את אורך הרשימה.

ב. הראו שתוחלת זמן הריצה של האלגוריתם היא $\Omega(\sqrt{n})$.

אוטומורפיזמים בגרף מקרי

הראו שלגרף המקרי $G(n,\frac{1}{2})$ אין אוטומורפיזם לא טריביאלי בהסתברות $1-o(1)$. ז"א, שבהסתברות $1-o(1)$, לכל פרמוטציה של הצמתים של G שאינה פונקצית הזהות תהיה קשת שתעבור לזוג צמתים שאינו קשת (או זוג שאינו קשת שיעבור לקשת).

ניחושים מול שקרן

קיים מספר טבעי לא ידוע k שאותו צריך לנחש (אין מראש הגבלה על גודלו). השאלה היחידה שמותר לשאול היא מהסוג "האם המספר שווה ל־a?" כאשר a מספר טבעי כל שהוא. אם $a \neq k$ אז התשובה תמיד תהיה "לא", אבל אם $a = k$ אז רק בסיכוי $\frac{2}{3}$ התשובה תהיה "כן", ובסיכוי $\frac{1}{3}$ התשובה בכל זאת תהיה "לא". כתבו אלגוריתם אשר יצליח למצוא את המספר הנכון (ז"א לקבל תשובה של "כן") לאחר ביצוע מספר ניחושים שתוחלתו היא $O(k)$ לכל k, והוכיחו זאת.

סימולציה של הסתברות

נתון מספר ממשי $0 < \alpha < 1$. הראו אלגוריתם (עם הוכחה) אשר משתמש אך ורק במ"מ מקריים ב"ת שמקבלים ערך מ־$\{0,1\}$ באופן יוניפורמי ("מטבעות הוגנים"), ופולט "1" בהסברות α בדיוק ו־"0" בהסתברות $1-\alpha$. תוחלת מספר המטבעות שהאלגוריתם משתמש בהם צריכה להיות חסומה ע"י קבוע שאינו תלוי ב־α.

רמז: אפשר לבצע סימולציה של בחירה יוניפורמית של $0 \leq \beta \leq 1$, ולעצור את הסימולציה ברגע שהשאלה האם $\beta < \alpha$ או $\beta \geq \alpha$ היא בעלת תשובה וודאית.

גרף מקרי ויחיד

נגדיר את משפחת ההתפלגויות על גרפים אינסופיים $G(\mathbb{N}, p)$ באופן הבא – קבוצת הצמתים של הגרף היא $\mathbb{N}$, ולכל $i < j \in \mathbb{N}$, קשת (לא מכוונת) תחבר ביניהם בהסתברות p באופן ב"ת בזוגות האחרים. הראו כי שני גרפים G ו־H הנבחרים באופן ב"ת לפי ההתפלגות $G\left(\mathbb{N}, \frac{1}{2}\right)$ הם איזומורפיים בהסתברות 1. איזומורפיזם כאן הוא פונקציה חח"ע ועל בין קבוצות הצמתים (האינסופיות) שמקיימת את התנאי הרגיל ש־u, v היא קשת אם ורק אם $f(u), f(v)$ היא קשת.

פתרונות לתרגילים על השיטה הבסיסית

חיפוש סופה של רשימה מקושרת

א. נראה שבסיכוי לפחות $\frac{1}{2}$ האלגוריתם יעצור לאחר $2\sqrt{n}$ שלבים. תהי A קבוצת $\sqrt{n}$ האיברים האחרונים ברשימה המקושרת. הסיכוי שבלפחות אחד מ־$\sqrt{n}$ השלבים הראשונים האלגוריתם בחר איבר מ־A (בכל שלב האלגוריתם מבצע גם מעקב אחרי הרשימה וגם בחירה אקראית של איבר) הוא לפחות $1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} > \frac{1}{2}$ עבור n גדול דיו. במידה ואיבר מ־A נבחר, האלגוריתם יעצור לאחר לא יותר מ־$\sqrt{n}$ שלבים נוספים, ומכאן החסם.

באשר לתוחלת זמן הריצה, נחזור על החישוב עבור הסיכוי שהאלגוריתם יעצור לאחר יותר מ $2k\sqrt{n}$ שלבים. האלגוריתם יעצור לאחר $2k\sqrt{n}$ שלבים לכל היותר אם באחד מ־$(2k-1)\sqrt{n}$ השלבים הראשונים יבחר איבר מ־$\sqrt{n}$ האיברים האחרונים, וכך ההסתברות שנעצור לאחר $2k\sqrt{n}$ שלבים לכל היותר חסומה מלמטה על ידי $1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{(2k-1)\sqrt{n}} > 1 - e^{-(2k-1)} > 1 - 2^{-k}$. לכן התוחלת חסומה ע"י $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} 2k\sqrt{n} = 4\sqrt{n}$.

לחישוב הסכום הנ"ל (וסכומים דומים) כדאי לדעת את השוויון השימושי הבא המוכח ע"י חילוף משתנים בסכום: $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i\right)$. למשל נובע מזה שמתקיים למ"מ X המקבל ערכים טבעיים בלבד השוויון $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j]$.

ב. נראה שבסיכוי לא יותר מ־$\frac{1}{2}$ האלגוריתם יעצור לאחר $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ שלבים לכל היותר; מכך נובע שתוחלת זמן הריצה היא לפחות $\frac{1}{4}\sqrt{n}$. נסמן את A כמקודם. הסיכוי שהאלגוריתם בחר איבר מ־A באחד מ־$\frac{1}{2}\sqrt{n}$ השלבים הראשונים

הוא בוודאי לא יותר מ־$\frac{1}{2}$ (פשוט חוסמים את סכום הסיכויים למציאת איבר כזה). אם איבר כזה לא נבחר, אז האלגוריתם לא יעצור בשלבים אלו: אם נסמן ב־i את השלב האחרון שבו האיבר הנבחר אקראית היה בעל אינדקס גדול מהאיבר העוקב לזה של השלב הקודם, אז מכך שאיבר זה אינו ב־A נובע שהאלגוריתם לא היה יכול להגיע עד סוף הרשימה בשלבים הנותרים עד $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

אוטומורפיזמים בגרף מקרי

לכל פרמוטציה $\sigma : V \to V$ שאינה הזהות, נסמן ב־E_σ את המאורע שהיא אוטומורפיזם של הגרף הנבחר G, ואז נראה שסכום ההסתברויות על כל הפרמוטציות האפשריות הוא $o(1)$ כנדרש. אם נסמן ב־$k(\sigma)$ את מספר זוגות הצמתים של G שהפרמוטציה "מזיזה" (ז"א מספר הזוגות $\{u,v\}$ עבורם $\{u,v\} \neq \{\sigma(u),\sigma(v)\}$), אז נשים לב שמתקיים $\Pr[E_\sigma] \leq 2^{-k(\sigma)/2}$. הסיבה לכך היא שאפשר לקחת $l = k(\sigma)/2$ זוגות $\{u_1,v_1\},\ldots,\{u_l,v_l\}$ כך שאף זוג לא מועבר ע"י σ לא לעצמו ולא לאף זוג אחר (אפשר לעשות זאת ע"י אלגוריתם חמדן), ואז המאורע ש־$\{u_i,v_i\}$ נמצא באותו סטטוס (קשת/לא־קשת) כמו $\{\sigma(u_i),\sigma(v_i)\}$ הוא בלתי תלוי במאורעות המקבילים לכל $j \neq i$. השלב הבא הוא שתי הטענות הבאות:

- לכל פרמוטציה σ שאינה הזהות, $k(\sigma) \geq n-2$. הסיבה לכך היא שאם נבחר צומת u כך ש־$\sigma(u) \neq u$, אז לכל v השונה מ־u ומ־$\sigma(u)$ יתקיים $\{u,v\} \neq \{\sigma(u),\sigma(v)\}$ (כן יתכן אבל שהזוג $\{u,\sigma(u)\}$ "מתהפך" במקום לעבור לזוג שונה).
- לכל פרמוטציה σ המעבירה לפחות $\sqrt{n}$ צמתים ממקומם, $k(\sigma) \geq n^{3/2}/2$. הסיבה לכך היא שאם ניקח צמתים $u_1,\ldots,u_{\sqrt{n}}$ המועברים ממקומם, וצמתים $v_1,\ldots,v_{n/2}$ כך שאף v_j לא שווה לאף u_i ולאף $\sigma(u_i)$, אז כל הזוגות האפשריים $\{u_i,v_j\}$ מקיימים $\{u_i,v_j\} \neq \{\sigma(u_i),\sigma(u_j)\}$.

עתה לא נותר אלא לסכם את ההסתברויות: מספר הפרמוטציות אשר מעבירות פחות מ־$\sqrt{n}$ צמתים ממקומם חסום ע"י $\binom{n}{\sqrt{n}}(\sqrt{n})! \leq 2^{\sqrt{n}\log n}$, ולכן הסיכוי שאחת או יותר מתוכן תהיה אוטומורפיזם חסום לפי איחוד מאורעות על ידי $2^{\sqrt{n}\log n - (n-2)/2} = o(1)$. מספר כל שאר הפרמוטציות חסום ע"י $n! \leq 2^{n\log n}$, והסיכוי שאחת או יותר תהיה אוטומורפיזם חסום ע"י $2^{n\log n - n^{3/2}/4} = o(1)$. לסיכום קיבלנו שאיחוד כל המאורעות E_σ מתקיים בהסתברות $o(1)$, כמבוקש.

ניחושים מול שקרן

האלגוריתם: בשלב ה־l (מתחילים מ־$l=0$) האלגוריתם שואל את השקרן את כל 2^l השאלות החל מ־"האם המספר הוא 1?" ועד "האם המספר הוא 2^l?". כמובן שהאלגוריתם עוצר בפעם הראשונה שהוא מקבל תשובה "כן".

הוכחת התוחלת: יהי $r = \lceil \log k \rceil$. האלגוריתם בטוח יבצע את r השלבים הראשונים, והסיכוי לביצוע השלב ה־l עבור $l > r$ הוא 3^{r-l}, שזהו הסיכוי שהתשובה עבור k (המספר הנכון) היתה "לא" שקרי בכל $l-r$ הפעמים הקודמות שהאלגוריתם נשאל זאת. מכאן אפשר לקבל חסם עבור תוחלת מספר השאלות הכולל:

$$\sum_{i=0}^{r} 2^i + \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j}2^{r+j} = (2^{r+1}-1) + 2^r \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^j = (2^{r+1}-1) + 2^r \cdot 2 < 2^{r+2} < 8k$$

סימולציה של הסתברות

נבצע סימולציה של בחירה יוניפורמית של $0 \leq \beta \leq 1$, ונעצור את הסימולציה ברגע שהשאלה האם $\beta < \alpha$ או $\beta \geq \alpha$ היא בעלת תשובה וודאית. באופן פורמלי: נתחיל עם $\beta_0 = 0$ ו־$k = 1$. בכל שלב (תוך שימוש ב"הטלת מטבע" חדשה בודדת), בהסתברות $\frac{1}{2}$ נקבע $\beta_k = \beta_{k-1}$ ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נקבע $\beta_k = \beta_{k-1} + 2^{-k}$. אם $\beta_k \geq \alpha$ אז נעצור מיידית ונחזיר "0". אם $\beta_k + 2^{-k} < \alpha$ אז נעצור מיידית ונחזיר 1. בכל מקרה אחר נגדיל את k ב־1 ונעבור לשלב הבא.

על מנת להראות שתוחלת מספר השלבים (ולכן גם מספר הטלות המטבע) חסומה ע"י מספר קבוע, נראה שבכל שלב יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ שהאלגוריתם יעצור. אם האלגוריתם לא עצר בשלב ה־$k-1$ (או קודם) אז לפי תנאי העצירה שנבדק שם מתקיים $\beta_{k-1} < \alpha \leq \beta_{k-1} + 2^{1-k}$. אם $\alpha \leq \beta_{k-1} + 2^{-k}$, אז נעצור בשלב הנוכחי אם ורק אם קבענו $\beta_k = \beta_{k-1} + 2^{-k}$, ואם $\alpha > \beta_{k-1} + 2^{-k}$ אז נעצור בשלב הנוכחי אם ורק אם קבענו $\beta_k = \beta_{k-1}$. בשני המקרים נעצור בהסתברות $\frac{1}{2}$.

עתה נחשב את הסיכוי הכולל שהאלגוריתם יעצור בסופו של דבר עם התשובה "1". אנחנו יודעים מהפסקה הקודמת שהסיכוי שהאלגוריתם לא עצר עד סוף השלב ה־k הוא בדיוק 2^{-k}, וזה כולל את המקרה "$k = 0$" (האלגוריתם בסיכוי 1 יבצע את השלב הראשון). נראה באינדוקציה שאם $l2^{-k} \leq \alpha < (l+1)2^{-k}$, אז בסיכוי $l2^{-k}$ בדיוק האלגוריתם יעצור עד סוף השלב ה־k עם תשובה 1. זה אומר שהסיכוי שהאלגוריתם יעצור בשלב כל שהוא עם תשובה "1" הוא α בדיוק.

נניח אם כן ש־$l'2^{1-k} \leq \alpha < (l'+1)2^{1-k}$, ובאינדוקציה שהסיכוי שהאלגוריתם עצר עם "1" עד השלב ה־$k-1$ הוא $l'2^{1-k}$ בדיוק (שימו לב שההנחה נכונה עבור הבסיס $k = 1$ עם $l' = 0$). אנו גם יודעים שהמאורע (הזר) שהאלגוריתם הגיע לראשית השלב ה־k הוא 2^{1-k}. במקרה הנ"ל אנו יודעים גם ש־$\beta_{k-1} = l'2^{1-k}$ (ברור ש־β_{k-1} הוא כפולה שלמה של 2^{1-k}, והמכפיל הוא לפי התנאי שהאלגוריתם בדק בשלב ה־$k-1$). נותר רק לבדוק את שני המקרים: אם $\alpha \leq \beta_{k-1} + 2^{-k}$ אז $l = 2l'$ ואכן ההתפלגות (המותנה על הגעה לשלב ה־k) שהאלגוריתם יענה "1" בדיוק בשלב זה היא אפס. אם $\alpha > \beta_{k-1} + 2^{-k}$ אז $l = 2l' + 1$ וההתפלגות (המותנה) שהאלגוריתם יענה "1" עתה היא $\frac{1}{2}$, אשר בחישוב הכולל תיתן תנו את הסכום המבוקש $l2^{-k}$ עבור ההסתברות לתשובה "1" בשלב כל שהוא עד סוף השלב ה־k.

גרף מקרי ויחיד

ראשית נוכיח כי עבור גרף מקרי כזה התנאי הבא מתקיים בהסתברות 1: לכל קבוצת צמתים סופית U ולכל $U' \subseteq U$, קיים צומת כל שהוא $v \notin U$ כך ש־U' כולם שכניו ו־$U \setminus U'$ כולם לא־שכניו.

בהינתן קבוצה סופית מסויימת U מגודל k, תת קבוצה $U' \subseteq U$ וצומת $v \notin U$, הסיכוי ש־v יהיה מחובר לכל צמתי U' ואינו מחובר לכל צמתי $U \setminus U'$ הוא בדיוק 2^{-k}. נסמן מאורע זה ב־A_v. קבוצת המאורעות $\{A_v : v \notin U\}$ היא בלתי תלויה לחלוטין, ולכן הסיכוי שאף אחד מהם לא יקרה הוא 0 (כגבול של $(1-2^{-k})^l$ עבור $l \to \infty$). נסמן ב־$B_{U,U'}$ את המאורע שאין צומת v כנדרש. ההסתברות למאורע זו היא 0, ומכיוון שיש מספר בן מניה של מאורעות $B_{U,U'}$ אפשריים, הסיכוי שיש אילו שהם U, U' ללא v מתאים הוא 0 (החסם על איחוד מאורעות עובד כל עוד מספרם הוא בן מניה).

הערה: במרחבי הסתברות אינסופיים יש הבדל בין "מאורע בהסתברות 0" לבין "מצב שאינו אפשרי". אפשר לתאר גרפים אינסופיים עבורם לא לכל U, U' יש v מתאים, אבל ההסתברות שיתקבל גרף דווקא מקבוצה זו היא 0.

עתה נניח ש־G ו־G' הם שני גרפים שנבחרו לפי $G(\mathbb{N}, \frac{1}{2})$. בהסתברות 1, לכל U סופית ו־$U' \subseteq U$ יש צומת $v \notin U$ כך שב־G יש קשתות ממנו ל־U' ולא ל־$U \setminus U'$, וצומת $v' \notin U$ כך שב־G' יש קשתות ממנה ל־U' ולא ל־$U \setminus U'$. נסמן את הצמתים הנ"ל ב־$v_{U,U'}$ ו־$v'_{U,U'}$ בהתאמה (אם יש יותר מאפשרות אחת, נבחר את זו עם האינדכס הנמוך ביותר).

עתה נבנה באינדוקציה קבוצות W_i ו־W'_i ופונקציות חח"ע ועל $f_i : W_i \to W'_i$, כך שיתקיימו הדברים הבאים:

- לכל $i < j$ מתקיים $W_i \subseteq W_j$, $W'_i \subseteq W'_j$, ו־$f_j|_{W_i} = f_i$ (ז"א ש־f_j היא הרחבה של f_i).
- לכל i הפונקציה f_i היא איזומורפיזם מהגרף המושרה ע"י G על W_i אל הגרף המושרה ע"י G' על W'_i (ז"א שלכל $u, v \in W_i$, uv היא קשת של G אם ורק אם $f_i(u)f_i(v)$ היא קשת של G').
- מתקיים $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W'_i = \mathbb{N}$.

לאחר הבניה הנ"ל ניתן לבנות את האיזומורפיזם $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י כך שלכל $v \in \mathbb{N}$ נבחר את $f(v)$ להיות שווה ל־$f_i(v)$ עבור i המקיים $v \in W_i$. הפונקציה f מוגדרת על כל $\mathbb{N}$ בגלל הסעיף השלישי למעלה, ומוגדרת היטב בגלל הסעיף הראשון למעלה. היא חח"ע כי לכל $u \neq v$ ניתן לבחור i כך ששניהם ב־W_i ולבדוק את f_i, היא על כי לכל w ניתן לבחור i כך ש־$w \in W'_i$ (קיים לפי הסעיף השלישי) ולמצוא את $f^{-1}(w) = f_i^{-1}(w)$, והיא איזומורפיזם בין גרפים לפי הסעיף השני למעלה.

נותר אם כן לבנות את הקבוצות W_i ו־W'_i ואת הפונקציות f_i. בסיס האינדוקציה יהיה $W_0 = W'_0 = \emptyset$, כאשר f_0 היא ה"פונקציה" הטריביאלית ביניהן. נניח שבנינו את הקבוצות והפונקציה עבור i, ונראה את הבניה עבור $i+1$. אנו נפצל למקרים לפי הזוגיות של i. כאן נשתמש במוסכמה שהמספרים הטבעיים מתחילים מ־0.

עבור $i = 2k$, אם $k \in W_k$ אז פשוט נגדיר $W_{k+1} = W_k$, $W'_{k+1} = W'_k$ ו־$f_{k+1} = f_k$. אחרת, ראשית נסמן ב־U_k את קבוצת השכנים של k ב־W_k, וב־$U'_k \subseteq W'_k$ את התמונה שלהם לפי f_k. נגדיר עתה $W_{k+1} = W_k \cup \{k\}$ ו־$W'_{k+1} = W'_k \cup \{v'_{W'_k,U'_k}\}$. נגדיר $f_{k+1}(k) = v'_{W'_k,U'_k}$, ובשאר המקומות f_{k+1} תהיה זהה ל־f_k. הנחת האינדוקציה והידוע על $v'_{W'_k,U'_k}$ (כולל זה שאינו ב־W'_k) מבטיחה שהבניה תתן את הקבוצות והפונקציה המבוקשות.

עבור $i = 2k+1$, אם $k \in W'_k$ אז פשוט נגדיר $W_{k+1} = W_k$, $W'_{k+1} = W'_k$ ו־$f_{k+1} = f_k$. אחרת, ראשית נסמן ב־U'_k את קבוצת השכנים של k ב־W'_k, וב־$U_k \subseteq W_k$ את קבוצת המקורות שלהם לפי f_k (זכרו שזוהי פונקציה חח"ע ועל). נגדיר עתה $W'_{k+1} = W'_k \cup \{k\}$ ו־$W_{k+1} = W_k \cup \{v_{W_k,U_k}\}$. נגדיר $f_{k+1}(v_{W_k,U_k}) = k$, ובשאר המקומות f_{k+1} תהיה זהה ל־f_k. הנחת האינדוקציה והידוע על v_{W_k,U_k} (כולל זה שאינו ב־W_k) מבטיחה שהבניה גם כאן תתן את הקבוצות והפונקציה המבוקשות.

כל התנאים המבוקשים פרט לדרישת האיחוד בסעיף השלישי יתקיימו באינדוקציה, וכן לכל k מובטח שהוא נמצא ב־W_{2k+1} וב־W'_{2k+2}, וכך מתקיימת גם דרישת האיחוד. בזאת סיימנו את המבוקש.

לינאריות התוחלת

גרפים רחוקים

המרחק בין שני גרפים G ו־H מוגדר כמספר הקשתות המינימלי שיש להוריד ו/או להוסיף ל־H כך שיהפוך להיות גרף איזומורפי ל־G. הראו שאם ל־G יש n צמתים ו־$m \neq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ קשתות אז הגרף הרחוק ביותר מ־G הוא או הגרף המלא או הגרף הריק. רמז: אפשר להראות לכל H שהמרחק שלו מ־G חסום ע"י $p(\binom{n}{2} - m) + (1-p)m$ עבור $0 \leq p \leq 1$ מתאים.

הגעה מהוססת

מגרילים משתנים מקריים $X_1, X_2, \ldots$, כולם בלתי תלויים ויוניפורמים מתוך $\{0, 1\}$. נסמן ב־T_k את המספר הקטן ביותר עבורו מתקיים $\sum_{t=1}^{T_k} X_t \geq k$. במילים אחרות, זהו ה"זמן" שבו מגיעים למספר k אחרי שבכל שלב מחליטים בהסתברות $\frac{1}{2}$ אם נשארים במקום או עולים ב־1. חשבו את התוחלת $\mathrm{E}[T_k]$.

קשתות לטווח קצר

נתון גרף דו־צדדי $G = (U, V, E)$, כאשר קבוצות הצמתים U ו־V שתיהן בגודל n, והקבוצה E בת αn^2 קשתות. עבור צומת $u \in U$ נסמן ב־$F_u \subseteq E$ את קבוצת הקשתות הנוגעות בשכנים של u (שימו לב שבפרט זה כולל גם קשתות מ־u עצמו). הראו שקיים u עבורו $|F_u| \geq \alpha^2 n^2$.

קירבה לדרגה קבועה

נתבונן בגרף המקרי $G(n,p)$ עבור $p = \alpha/n$ (כזכור, המדובר בגרף עם קבוצה V בעלת n צמתים, כך שכל זוג צמתים uv נבחר להיות בקבוצת הקשתות E בהסתברות p בדיוק, באופן ב"ת לחלוטין בבחירות של הזוגות האחרים). כמו כן נתונים β ו־γ, כולם גדולים מ־0. הראו את קיומו של d שתלוי ב־α, β, γ בלבד, כך שבסיכוי לפחות $1 - \gamma$ אפשר להסיר מהגרף עד βn קשתות, ולגרף שיוותר תהיה דרגה מקסימלית שאינה עולה על d.

סיפוק חלקי של נוסחת CNF

נתונה נוסחת CNF עם m פסוקיות, כל אחת מהן דיסיונקציה ("או") בין כמה ליטרלים (משתנים או שלילתם). מובטח כי לא קיימות פסוקיות ריקות, וכי לא קיים משתנה x_i עבורו מופיעות שתי הפסוקיות $x_i, \neg x_i$ (כלומר עבור כל שתי פסוקיות נתונות, ניתן לספק את שתיהן בו זמנית). הוכיחו כי קיימת השמה שמספקת לפחות $\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ מהפסוקיות. הערה: תרגיל זה הוא משפט של Specker, אך ההוכחה המקורית אינה משתמשת בשיטה ההסתברותית.

רמז: כדאי לחשוב על המקרה שבו כל הפסוקיות הן מהצורה "x_i" או "$\neg x_j \vee \neg x_k$".

לא כל הדרכים מובילות

הילוך מקרי מצומת s בגרף G (שיכול להיות מכוון) מוגדר באופן הבא: המשתנה המקרי X_0 (שמקבל ערכים מתוך קבוצת הצמתים של הגרף) יקבל בהסתברות 1 את הצומת s. המ"מ X_1 יקבל שכן של s שנבחר באופן יוניפורמי מקבוצת השכנים האפשריים. בהמשך, לאחר בחירת ערך X_{i-1}, המ"מ X_i יקבל צומת שנבחר יוניפורמית מקבוצת השכנים של הערך של X_{i-1}, כאשר כל הגרלה נערכת באופן ב"ת בהגרלות קודמות.

נסמן ב־T_v את זמן ההגעה הראשון לצומת v, ז"א את המספר הכי נמוך עבורו $X_{T_v} = v$. למשל, ברור שמתקיים $X_s = 0$ בהסתברות 1. הראו (ללא שימוש בכלים מתקדמים של ניתוח הילוכים מיקריים) שלכל גרף G וצומת s קיים צומת v עבורו $\mathrm{E}[T_v] = \Omega(n)$, כאשר n מציין את מספר הצמתים בגרף.

פתרונות לתרגילים על לינאריות התוחלת

גרפים רחוקים

נסמן ב־V את קבוצת הצמתים של G וב־V' את קבוצת הצמתים של H כל שהוא (כאשר שתי קבוצות הצמתים מגודל n). נסמן $p = |E'|/\binom{n}{2}$ כאשר E' היא קבוצת הקשתות של H. נבחר עתה פונקציה חח"ע ועל $f : V \to V'$ באופן יוניפורמי (מתוך קבוצת כל הפונקציות הנ"ל), ונחשב את תוחלת מספר הזוגות $u, v \in V$ שיש עבורם הבדל בין השיוך ל־E (קבוצת הקשתות של G) של u, v לבין השיוך ל־E' של $f(u), f(v)$. נשים לב כי הפונקציה f עם הכי מעט הבדלים קובעת את המרחק בין הגרפים.

נסמן ב־$X_{u,v}$ את משתנה האינדיקטור שיקבל 1 אם יש כזה הבדל, ו־0 אחרת. התוחלת שלו היא p אם u,v אינו קשת של G, ו־$1-p$ אם u,v כן קשת של G. לכן, תוחלת מספר ההבדלים הכולל היא

$$\mathrm{E}[\sum_{u,v} X_{u,v}] = \sum_{uv\notin E} p + \sum_{uv\in E}(1-p) = p(\binom{n}{2} - m) + (1-p)m$$

בפרט זהו חסם עליון על המרחק בין G ל־H, כי קיימת f אחת לפחות שבה מספר ההבדלים אינו עולה על התוחלת, ולכן בפרט בזו האופטימלית מספר ההבדלים חסום על ידי ערך זה.

עתה נשים לב שהפונקציה הנ"ל של p מקבלת את המקסימום שלה עבור $p=0$ אם $m > \frac{1}{2}\binom{n}{2}$, ומקבלת אותו עבור $p=1$ אם $m < \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ (כזכור הנחנו שלא מתקיים $m = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$). במקרה הראשון הגרף הרחוק ביותר היחידי הוא הגרף הריק, שהוא היחידי עבורו $p=0$ (קל לראות שהמרחק ממנו אכן שווה לחסם במקרה זה), ובמקרה השני הגרף הרחוק ביותר היחידי הוא הגרף המלא, שהוא היחידי עבורו $p=1$.

הגעה מהוססת

עבור כל k, נחשב ראשית את תוחלת ההפרש $\mathrm{E}[T_k - T_{k-1}]$. זוהי התוחלת של מספר ההטלות של מטבע הוגנת עד שמתקבל "1", אשר כידוע שווה ל־2 (אפשר למשל לחשב אותה לפי $\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\Pr[X=i] = \sum_{i=1}^{\infty}\Pr[X\geq i]$). עתה משתמשים בלינאריות התוחלת לחישוב התוחלת שלנו: $\mathrm{E}[T_k] = \mathrm{E}[T_{k-1}] + \mathrm{E}[T_k - T_{k-1}] = \mathrm{E}[T_k] + 2$. מכאן נובע (למשל באינדוקציה) שמתקיים $\mathrm{E}[T_k] = 2k$.

קשתות לטווח קצר

נבחר את u באופן מקרי ויוניפורמי מכל צמתי U, ונחשב את התוחלת של $|F_u|$. לכל צומת $v\in V$ נסמן את הדרגה שלו ב־d_v. עבור קשת wv, הסיכוי שלה להיות ב־F_u הוא בדיוק הסיכוי ש־u ייבחר להיות שכן של v, ז"א d_v/n. על כן, תוחלת מספר הקשתות הסמוכות ל־v שנמצאות ב־F_u היא $(d_v)^2/n$). על מנת לחשב את תוחלת מספר הקשתות הכולל ב־F_u לפי לינאריות התוחלת, נסכום על כל $v\in V$ (כל קשת ב־E סמוכה ל־$v\in V$ אחד בדיוק), ונקבל $\mathrm{E}[|F_u|] = \sum_{v\in V}(d_v)^2/n = n\sum_{v\in V}(d_v/n)^2 \geq (\sum_{v\in V}(d_v/n))^2 = \alpha^2 n^2$.

הסבר: אי השוויון למעלה הוא אי־שוויון הנורמות, ולאחריו השתמשנו ב־$\sum_{v\in V} d_v = |E| = \alpha n^2$. מכיוון שהראינו שמתקיים $\mathrm{E}[|F_u|]\geq\alpha^2n^2$, נובע מכך שקיימת בחירה ספציפית של u עבורה $|F_u|\geq\alpha^2n^2$, כנדרש.

קירבה לדרגה קבועה

ראשית נבצע ניתוח הסתברותי עבור d כללי, ואחר כך נבחר d שיתאים לנו. עבור שני צמתים $u,v\in V$, הסיכוי ש־uv תהיה קשת הוא α/n בדיוק. התוחלת של מספר השכנים של u פרט ל־v (אם הוא שכן או לא) היא $(n-2)\cdot\alpha/n < \alpha$). על כן לפי אי שוויון מרקוב, הסיכוי של־u יהיו לפחות d שכנים שאינם v הוא קטן מ־α/d. בדומה לכך, הסיכוי של־v יהיו לפחות d שכנים שאינם u קטן מ־α/d, ולכן הסיכוי שלפחות אחד המאורעות האלו קורה הוא פחות מ־$2\alpha/d$.

עתה, נשים לב שהמאורע על מספר השכנים של u ו־v מחוץ לצמתים אלו הוא ב"ת במאורע ש־uv קשת בעצמה, בגלל שבפרט כל זוג שאינו uv נבחר להיות קשת באופן ב"ת לבחירה של האם uv קשת. על כן, הסיכוי של uv להיות קשת אשר לפחות אחד מצמתיה בעל דרגה גדולה מ־d (ז"א עם לפחות d שכנים מחוץ ל־uv עצמה) חסום ע"י $2\alpha^2/dn$.

מכאן, לפי לינאריות התוחלת, תוחלת מספר הקשתות עם לפחות צומת אחד מדרגה גבוהה מ־d היא קטנה מ־$(2\alpha^2/dn)\binom{n}{2} < \alpha^2 n/d$. בחירה של $d = \alpha^2/\beta\gamma$ תיתן לנו (שוב לפי אי שוויון מרקוב) שבסיכוי יותר מ־$1-\gamma$ לא

יהיו יותר מ־βn קשתות סמוכות לצמתים מדרגה גבוהה מ־d. במידה וזה קורה, אם אנחנו נסיר את כל הקשתות הנ"ל, אז לא יישארו קשתות סמוכות לצמתים מדרגה גבוהה מ־d, ולכן בפרט לא יהיו צמתים מדרגה כזו בגרף.

סיפוק חלקי של נוסחת CNF

ראשית, בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח את ההנחות הבאות (שימו לב כי אנחנו כן מרשים לאותה פסוקית להופיע מספר פעמים בנוסחה):

- אין אף פסוקית מהצורה $\neg x_i$, שכן במקרה כזה נסמן $y_i \triangleq \neg x_i$ ונחליף את כל מופעי x_i ב $\neg y_i$. נזכר כי נתון שאם מופיעה הפסוקית $\neg x_i$, אז לא מופיעה הפסוקית x_i.
- בכל פסוקית המכילה ליטרל חיובי (כלומר לא בתוך שלילה) לא קיימים ליטרלים (חיוביים או שליליים) אחרים. ניתן להשיג זאת על ידי השמת סדר כלשהו על המשתנים, ולכל פסוקית בה יש מספר ליטרלים חיוביים בוחרים את המינימלי מבחינת הסדר ומסירים את כל הליטרלים האחרים מהפסוקית. ברור כי כל השמה שמספקת את הפסוקית החדשה מספקת גם את המקורית.
- כל פסוקית ללא ליטרלים חיוביים מורכבת משני ליטרלים שליליים בדיוק. שוב, אם יש יותר, ניתן לשמור רק את שני הליטרלים השליליים המינימליים מבחינת הסדר ולהסיר את כל הליטרלים האחרים מהפסוקית.

כעת ניתן להשתמש בלינאריות התוחלת. נבחר כל משתנה באופן בלתי תלוי להיות 1 בהסתברות $\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ ולהיות 0 בהסתברות המשלימה $1-\alpha$. פסוקית מהצורה x_i תסתפק בהסתברות α. פסוקית מההצורה $\neg x_i \vee \neg x_j$ תסתפק בהסתברות

$$\begin{aligned} 1-\alpha^2 &= 1-\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 \\ &= 1-\frac{1}{4}\left(5-2\sqrt{5}+1\right) \\ &= 1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=\alpha \end{aligned}$$

כך מלינאריות התוחלת תוחלת מספר הפסוקיות המסופקות היא $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ מהפסוקיות, ולכן קיימת הצבה שמספקת לפחות כמספר הזה של פסוקיות.

לא כל הדרכים מובילות

נניח שלכל v מתקיים $\mathrm{E}[T_v] < n/4$, ונראה סתירה. לפי אי שוויון מרקוב מתקיים אז $\Pr[T_v \geq n/2] < \frac{1}{2}$, ז"א שבסיכוי גדול מ־$\frac{1}{2}$ הגענו לצומת v בפחות מ־$n/2$ צעדים. נסמן ב־I_v את משתנה האינדיקטור עבור המאורע הזה, וב־Y את המ"מ המקבל את מספר הצמתים השונים שביקרנו בהם בפחות מ־$n/2$ צעדים. מתקיים $Y = \sum_{v \in V} I_v$ כאשר V מסמן את קבוצת הצמתים של הגרף, ולכן $\mathrm{E}[Y] = \sum_{v \in V} \mathrm{E}[I_v] > n \cdot \frac{1}{2}$. זוהי סתירה לעובדה שערכו של Y לעולם אינו יכול לעלות על $n/2$ (גם אם כוללים את s), כי בכל צעד אנחנו לא מבקרים ביותר מצומת חדש אחד.

דה־רנדומיזציה

בלתי תלויים בשלשות

הראו עבור $k \geq 1$ שאפשר לבנות 2^k משתנים מקריים, אשר מקבלים כ"א ערך יוניפורמי מתוך $\{0,1\}$ וכך שכל שלושה מהם הם בלתי תלויים, כך שגודל מרחב ההסתברות כולו הוא 2^{k+1} בלבד.

מרחב מדגם מוגבל מוטה

אנחנו מעוניינים במרחב הסתברות שעבורו מוגדרים משתנים מקריים $X_1, \ldots, X_n$, כל שלכל i מתקיימים השוויונים $\Pr[X_i = 0] = \frac{2}{3}$ ו־$\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{3}$, וכן המשתנים הנ"ל הם ב"ת בזוגות (לכל $i < j$ מתקיים ש־X_i ב"ת ב־X_j). הראו שיש מרחב כזה שמספר האיברים הכולל בו הוא פולינומי ב־n.

פתרונות לתרגילים על דה־רנדומיזציה

בלתי תלויים בשלשות

נסמן ב־$Y_1, \ldots, Y_{k+1}$ סדרה של משתנים מקריים ב"ת לחלוטין שמקבלים ערכים באופן יוניפורמי מ־$\{0,1\}$. אלו יהוו את מרחב ההסתברות שלנו. עתה נסמן ב־$V \subset \{0,1\}^{k+1}$ את קבוצת כל הווקטורים הבינארים מאורך $k+1$ שלהם מספר אי־זוגי של ערכי 1. לא קשה לראות שמתקיים $|V| = 2^k$. עתה, לכל $v \in V$ נגדיר את המשתנה המקרי $X_v = \bigoplus_{i=1}^{k+1} v_i Y_i$, כאשר נסמן $v = (v_1, \ldots, v_{k+1})$. נראה עתה שאלו בלתי־תלויים בשלשות.

ההוכחות שאלו משתנים מקריים יוניפורמים וב"ת בזוגות כבר נעשו למעשה בפרק התרגול על מרחבי מדגם מוגבלים. הדבר העיקרי לשים לב עתה הוא שלכל $u, v \in V$, הסכום $u \oplus v$ שלהם (מודולו 2) מכיל מספר זוגי של ערכי 1. על כן לא יהיה ווקטור ב־V ששווה ל־$u \oplus v$, ומכאן שלכל $w \in V$ השונה מ־u ו־v, ערך X_w יוגרל באופן בלתי־תלוי מהערך של $Y_i(X_u \oplus X_v) = \bigoplus_{i=1}^{k+1}(u_i \oplus v_i)Y_i$. מאי תלות זו יחד עם אי התלות של X_u ו־X_v זה בזה (כאשר $u, v, w \in V$ כולם שונים זה מזה) נובעת אי התלות של משתנים אלו כשלישיה.

מרחב מדגם מוגבל מוטה

ראשית נבנה מרחב הסתברות עם משתנים מקריים $Z_1, \ldots, Z_n$, כך שכל Z_i מתפלג יוניפורמית מעל $\{0,1,2\}$, וכן כל המשתנים הנ"ל הם ב"ת בזוגות. מאלו אפשר לבנות את $X_1, \ldots, X_n$ ע"י כך שנקבע $X_i = 1$ אם $Z_i = 0$ ואחרת $X_i = 0$. עבור בחירת $Z_1, \ldots, Z_n$, ניקח $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, נגריל את $Y_1, \ldots Y_k$ להיות משתנים מקריים יוניפורמים ב־$\{0,1,2\}$ וב"ת לחלוטין, ואז לכל קבוצה $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \ldots, k\}$ נגדיר את $Z_A = \bigoplus_{a \in A} Y_a$, כאשר כאן $\bigoplus$ מסמן סכום מודולו 3. לבסוף, נגדיר $Z_i = Z_{A_i}$ כאשר $A_1, \ldots A_n$ הן קבוצות לא־ריקות שונות זו מזו.

גודל מרחב ההסתברות הוא $3^k = O(n^{\log_2 3})$, וזה פולינומי ב־n. ההוכחה שכל מ"מ Z_A מתפלג יוניפורמית ב־$\{0,1,2\}$ מאוד דומה לזו שנעשתה בתרגול עבור מרחבי דגימה מוגבלים, ולא נציג אותה מחדש כאן.

באשר לאי־תלות, נראה למשל שמתקיים $\Pr[Z_A = 0 | Z_B = 0] = \frac{1}{3}$ לכל $A \neq B$. לצורך זה נניח שקיים איבר $b \in B \setminus A$ (המקרה שבו קיים איבר ב־$A \setminus B$ הוא בעל הוכחה זהה). נניח לשם פישוט הביטויים שנכתוב שמתקיים גם $b = 1$, כמובן שההוכחה תהיה אותו דבר ל־b אחרים. נשים עתה לב שלכל $\beta_2, \ldots, \beta_k$ מתקיים:

$$\Pr[Z_A = 0 | Y_2 = \beta_2, \ldots, Y_k = \beta_k] = \Pr\Big[Y_1 = 3 - \bigoplus_{a \in A \setminus \{1\}} \beta_a \Big| Y_2 = \beta_2, \ldots, Y_k = \beta_k\Big] = \frac{1}{3}$$

מכאן אפשר לסיים לפי נוסחת ההסתברות השלמה (תוך שימוש בכך שערך Z_B נקבע ע"י ערכי $Y_2, \ldots, Y_k$).

$$\begin{aligned}\Pr[Z_A = 0 | Z_B = 0] &= \sum_{\beta_2, \ldots, \beta_k} \Pr[Z_A = 0 | Y_2 = \beta_2, \ldots, Y_k = \beta_k] \Pr[Y_2 = \beta_2, \ldots, Y_k = \beta_k | Z_B = 0] \\ &= \sum_{\beta_2, \ldots, \beta_k} \frac{1}{3} \Pr[Y_2 = \beta_2, \ldots, Y_k = \beta_k | Z_B = 0] = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

הגרלה עם תיקונים

קבוצות ב"ת בהיפרגרפים

עבור היפרגרף 3־יוניפורמי (ז"א מבנה עם קבוצת צמתים V וקבוצת "קשתות" E שבה כל קשת היא תת קבוצה של V בת שלושה צמתים בדיוק) בעל n צמתים ו־m קשתות, כאשר $m \geq \frac{1}{3}n$, הראו כי קיימת קבוצת צמתים בלתי תלויה (ז"א קבוצה $V' \subseteq V$ שאינה מכילה אף קשת מ־E) שגודלה לפחות $\frac{2n^{3/2}}{3\sqrt{3m}}$.

מספרי רמזי לא סימטרים

נסמן ב־$R(4,k)$ את מספר הצמתים המכסימלי שעבורו אפשר לבנות גרף שאינו מכיל קליק עם 4 צמתים או קבוצה ב"ת בת k צמתים. הראו כי $R(4,k) \geq \Omega((k/\log k)^2)$.

נזכיר אי שוויון שיכול לעזור כאן ובשאלות אחרות על גרפים: $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} < (\frac{en}{k})^k$, עבור $1 \leq k \leq n$.

דרגה, צביעה, מותן

הראו לכל k קבוע, ולכל n גדול מספיק (ביחס ל־k), שאפשר למצוא גרף עם n צמתים, ודרגה חסומה ע"י קבוע d (תלוי ב־k), כך שאין לו k־צביעה וגם אין בו מעגלים מגודל קטן מ־$C \log n$, עבור קבוע $C > 0$ מתאים (גם תלוי ב־k). אפשר לעשות את זה תוך שימוש בניתוח של השאלה "קירבה לדרגה קבועה" מהפרק על לינאריות התוחלת.

פתרונות לתרגילים על הגרלה עם תיקונים

קבוצות ב"ת בהיפרגרפים

נסתכל על הפרוצדורה הבאה: ראשית נגריל קבוצת צמתים U ע"י כך שכל צומת ב־V יבחר באופן ב"ת בהסתברות α (את ערכו של α נבחר אח"כ). עתה נקבל ממנה קבוצת צמתים ב"ת W ע"י כך שמכל קשת של ההיפרגרף המוכל ב־U נחסר את אחד מצמתיה. אם נסמן ב־X את מספר הצמתים ב־U וב־Y את מספר הקשתות המוכלות ב־U, הרי שגודל W הוא לפחות $X - Y$ (יתכן שהוא גדול יותר). נחשב אם כן את תוחלת הפרש זה: $\mathrm{E}[X-Y] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[Y] = \alpha n - \alpha^3 m$. עתה נבחר את ה־$\alpha$ שלנו: ע"י גזירה לפי α וחיפוש נקודה המאפסת את הנגזרת נקבל $\alpha = \sqrt{\frac{n}{3m}}$ (כאן חשוב שיתקיים $m \geq \frac{1}{3}n$ כדי שנקבל $\alpha \leq 1$). ע"י הצבה נקבל עבור ערך זה $\mathrm{E}[X-Y] = \frac{2n^{3/2}}{3\sqrt{3m}}$, ומכאן שקיימת בחירה ספציפית של U שעבורה הפרש מספר הצמתים ומספר המשולשים אכן אינו יורד מביטוי זה. הקבוצה W שנקבל מ־U תקיים אם כן את המבוקש.

מספרי רמזי לא סימטרים

נסתכל על הגרף G בעל n הצמתים שבו כל זוג נבחר להיות קשת באופן ב"ת בהסתברות $n^{-1/2}$. תוחלת מספר העותקים של K_4 (הגרף השלם בעל 4 צמתים) בגרף זה היא $\binom{n}{4}(n^{-1/2})^6 < \frac{n}{12}$, ולכן בהסתברות לפחות $\frac{5}{6}$ קיימים

ב־G לא יותר מ־$\frac{n}{2}$ עותקים שונים של K_4. בנוסף, אם $n = \lfloor \frac{1}{16}(\frac{k}{\ln k})^2 \rfloor$ (כאשר הלוגריתם כאן הוא בבסיס טבעי), אז הסיכוי שיש ב־G קבוצת צמתים ב"ת כל שהיא בגודל k חסום (עבור k גדול דיו) ע"י

$$\binom{n}{k}(1-n^{-1/2})^{\binom{k}{2}} < (\frac{en}{k})^k e^{-n^{-1/2}\binom{k}{2}} < (ek)^k e^{-2(k-1)\ln k} = e^{k(1+\ln k)-2(k-1)\ln k} = o(1)$$

ולכן עבור כל k גדול דיו קיים גרף G בעל n צמתים שבו אין קבוצה ב"ת מגודל k וכן אין יותר מ־$\frac{n}{2}$ עותקים של K_4.

עתה נבחר את G' להיות הגרף המתקבל מ־G ע"י כך שלכל עותק של K_4 נסיר את אחד מצמתיו מ־G. ב־G' אין לא עותקים של K_4 ולא קבוצות ב"ת מגודל k, ומספר צמתיו הוא לפחות $\frac{1}{2}n = \Omega((k/\ln k)^2)$.

דרגה, צביעה, מותן

נתחיל עם הגרף המקרי המוגרל לפי $G(n, \alpha/n)$, עבור α שנבחר בהמשך.

בסופו של דבר נרצה להסיר מהגרף קשתות. על כן ננתח כמה קשתות יהיו בתוך כל קבוצה בת לפחות n/k צמתים. עבור קבוצה A קבועה, מספר הקשתות בתוכה הוא סכום של $\binom{|A|}{2}$ משתנים מקריים ב"ת שכל אחד מהם מקבל 1 בהסתברות α/n ו־0 בהסתברות $1-\alpha/n$. עבור n גדול דיו התוחלת של מספר הקשתות היא לפחות $\frac{\alpha}{3k^2}n$, ולכן לפי חסם צ'רנוף כפלי (שמופיע בתרגול) עם $\delta = \frac{1}{2}$, ההסתברות שיהיו פחות מ־$\frac{\alpha}{6k^2}n$ קשתות כאלו חסומה ע"י $e^{-\alpha n/24k^2}$. נבחר $\alpha = 24k^2$, ואז בהסתברות $1-o(1)$ (לפי איחוד מאורעות על לא יותר מ־2^n קבוצות אפשריות) בכל קבוצה A כזו יהיו לפחות $\frac{\alpha}{6k^2}n$ קשתות.

עבור גרף G המקיים את הנ"ל, גם אם נסיר ממנו פחות מ־$\frac{\alpha}{6k^2}n$ קשתות, לא נוכל לצבוע אותו ב־k צבעים, בגלל שעדיין לא תהיה לנו קבוצה חסרת־קשתות בת לפחות n/k קשתות. עתה נשתמש בשאלה "קרבה לדרגה קבועה" עם $\beta = \frac{\alpha}{12k^2}n$ ו־$\gamma = \frac{1}{3}$, כדי להבטיח שבהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ נוכל להסיר לא יותר מ־βn קשתות ולקבל גרף עם דרגה חסומה ע"י d, כאשר d הוא הקבוע המתאים התלוי ב־α, β, γ, שלושה קבועים שנבחרו כאן עם תלות ב־k בלבד.

עתה ננתח את מספר המעגלים מגודל קטן מ־$C\log n$ עבור C כל שהוא. נחסום עבור n גדול דיו את תוחלת מספר המעגלים: $\sum_{i=3}^{C\log n-1}\frac{n!}{2i(n-i)!}\cdot\frac{\alpha^i}{n^i} \le \sum_{i=3}^{C\log n-1}\alpha^i \le \alpha^{C\log n}$. עבור $C > 0$ קטן מספיק (תלוי ב־α וב־β שתלויים רק ב־k), התוחלת הזו תהיה קטנה ממש מ־$\frac{1}{3}\beta n$, ולכן מאי שוויון מרקוב בסיכוי לפחות $\frac{2}{3}$ יהיו בגרף פחות מ־βn מעגלים, שניתן להסיר את כולם ע"י כך שמסירים קשת אחת מכל מעגל.

מאיחוד מאורעות, בסיכוי חיובי הגרף G יקיים את כל שלושת התנאים: הוא לא יהיה k־צביע כל עוד מסירים ממנו פחות מ־$n = 2\beta n$ קשתות, יהיה ניתן להפוך אותו לבעל דרגה חסומה ע"י d ע"י הסרה של לא יותר מ־βn קשתות, ויהיה ניתן להפוך אותו לחסר מעגלים מגודל קטן מ־$C\log n$ ע"י הסרה של פחות מ־βn קשתות נוספות. לכן, אם לוקחים G כזה ומסירים ממנו את הקשתות עבור סיפוק תנאי הדרגה והמעגלים, מקבלים את הגרף המבוקש.

למת הבידוד

קיום מסלול בגרף מכוון

עבור גרף מכוון בעל n צמתים G וצמתים s, t נרצה לבדוק האם קיים מסלול מ־s ל־t. הראו קיום רדוקציה הסתברותית (ועם סבוכיות מקום LogSpace) של קלט של הבעיה הכללית G, s, t לקלט G', s', t' בעל הפרמטרים הבאים: אם אין מסלול ב־G מ־s ל־t, אז גם אין אף מסלול ב־G' מ־s' ל־t' (בהסתברות 1), ואם יש מסלול ב־G, אז בהסתברות לפחות $\Omega(n^{-3})$ יש ב־G' מסלול יחידי מ־s' ל־t'.

הערה: רדוקציה זו משמשת בהוכחה של Wigderson לכך שמתקיים $\mathrm{NL/poly} \subseteq \oplus\mathrm{L/poly}$.

בידוד של שני מבנים

נניח ש־A קבוצה בת m איברים, וש־$\mathcal{F}$ היא משפחה של תתי קבוצות של A. הראו שאם מגרילים באופן מקרי ויוניפורמי (וב"ת) פונקצית משקל $w : A \to \{1, \ldots, n\}$, אז בסיכוי $1 - \frac{3m}{n}$ לפחות גם האיבר ב־$\mathcal{F}$ בעל המשקל המינימלי וגם האיבר ב־$\mathcal{F}$ בעל המשקל השני הכי קטן הם יחידים.

בידוד רב־קבוצות

נניח כי $\mathcal{F}$ היא משפחה של רב־קבוצות הנלקחת מהקבוצה $A = \{1, \ldots, n\}$, כשכל איבר מ־A רשאי להופיע עד r פעמים באיבר מ־$\mathcal{F}$. נבחר באופן מקרי ויוניפורמי משקל $w(a) \in \{1, \ldots, c\}$ לכל $a \in A$ ונקבע לכל $F \in \mathcal{F}$ את המשקל המושרה עליו, כלומר $w(F) = \sum_{a \in F} w(a)$ כאשר כל איבר נספר כמספר מופעיו בקבוצה. הוכיחו כי בהסתברות של לפחות $1 - \frac{rn}{c}$ קיים איבר יחיד ב $\mathcal{F}$ עם משקל מינימום.

כמו כן, הציגו דוגמא למקרה בו ההסתברות לקיום איבר יחיד עם משקל מינימום היא פחות מ־$1 - \frac{n}{c}$ (מספיק למצוא דוגמה עבור n ו־c ספציפים).

פתרונות לתרגילים על למת הבידוד

קיום מסלול בגרף מכוון

אם נגריל לכל קשת ב־G משקל שנבחר יוניפורמית ובאופן ב"ת מהתחום $\{1, \ldots, 2n^2\}$, אז במידה ויש בגרף מסלול כל שהוא מ־s ל־t, לפי למת הבידוד בהסתברות של לפחות $\frac{1}{2}$ יהיה עתה מסלול יחידי עבורו סכום המשקלות הוא מינימלי; מכיוון שמסלול מינימלי הוא בהכרח פשוט, אפשר לראות כל מסלול כתת קבוצה של הקשתות. בנוסף, המשקל של המסלול המינימלי בוודאי לא יעלה על n^3. את הרדוקציה מ־G לגרף החדש G' נבצע עתה באופן הבא.

ראשית, נבחר באופן יוניפורמי מספר $1 \leq l \leq n^3$. לכל צומת v בגרף המקורי, יהיו בגרף החדש $l+1$ צמתים שיסומנו $(v, 0), \ldots, (v, l)$. עתה לכל קשת u, v בגרף המקורי נבחר יוניפורמית את המשקל $w(u, v)$ שלה מתוך $\{1, \ldots, 2n^2\}$, ונצרף לגרף החדש את כל הקשתות מהטיפוס $(u, i), (v, i + w(u, v))$ עבור $0 \leq i \leq l - w(u, v)$. הרדוקציה היא ב־LogSpace בגלל שאפשר "לשכוח" את $w(u, v)$ מייד לאחר כתיבת הקשתות המתאימות לה ב־G', ולשחרר את הזיכרון עבור משקל הקשת הבאה (אגב, בהרבה מודלים חשובים מתירים לאלגוריתם עם מקום מוגבל לקבל מראש רשימה של כל הטלות המטבע שלא על חשבון הזיכרון שלו, אולם זה לא היה נוסח השאלה כאן).

עתה נבחן מה הסיכוי שיש ב־G' מסלול יחידי מ־$(s, 0)$ ל־(t, l). אם בגרף G אין מסלול מ־s ל־t, אז לא קשה לראות שאין בגרף החדש כל מסלול מ־$(s, 0)$ ל־(t, l). מצד שני, אם יש בגרף G מסלול כזה, אז מספר המסלולים בגרף החדש זהה למספר המסלולים ב־G שעבורם סכום המשקלות הוא בדיוק l (כולל מסלולים לא פשוטים). אם ב־G היה מסלול, אז בהסתברות של לפחות $\frac{1}{2}$ יהיה מסלול יחידי בעל משקל מינימלי. במידה וזה אכן קרה, ההסתברות ש־l יהיה שווה למשקל המסלול המינימלי היחיד היא n^{-3}. לכן בהסתברות $\frac{1}{2}n^{-3} = \Omega(n^{-3})$ שני המאורעות יקרו, ובמצב זה יהיה ב־G' מסלול יחידי מ־$(s, 0)$ ל־(t, l).

בידוד של שני מבנים

ההוכחה נעשית בדומה להוכחה של למת הבידוד המקורית. עבור פונקציית המשקל שנבחרה w, נגדיר לכל $a \in A$ את הערכים הבאים: W_a יהיה המשקל המינימלי מבין כל איברי $\mathcal{F}$ המכילים את a. $\overline{W}_a$ יהיה המשקל המינימלי מבין אלו שאינם מכילים את a. W'_a יהיה המשקל של האיבר בעל המשקל השני הכי קל מאלו שמכילים את a. $\overline{W}'_a$ יהיה המשקל של האיבר השני הכי קל מאלו שאינם מכילים את a.

נקרא לאיבר a "חד משמעי ביותר" אם גם $W_a \neq \overline{W}_a$ וגם $W_a \neq \overline{W}'_a$ וגם $W'_a \neq \overline{W}_a$. בדומה להוכחת הלמה המקורית, הערכים $\overline{W}_a$, $\overline{W}'_a$, $W_a - w(a)$ ו־$W'_a - w(a)$ כולם אינם תלוים בערך $w(a)$, אלא רק בערכים של w עבור האיברים ב־$A \setminus \{a\}$. על כן כל אחד מאי השוויונים הרצויים מתקיים בהסתברות לפחות $1 - \frac{1}{n}$, ומכאן שכולם יתקיימו בהסתברות לפחות $1 - \frac{3}{n}$. לכן (שוב ע"י שימוש בחסם על איחוד מאורעות) בהסתברות לפחות $1 - \frac{3m}{n}$ כל איברי A הם חד משמעיים ביותר. עתה כל שנותר להוכיח הוא שבהינתן שכל איברי A מקיימים זאת, גם האיבר של $\mathcal{F}$ בעל המשקל המינימלי וגם האיבר בעל המשקל השני הכי קטן הם יחידים.

האיבר בעל המשקל המינימלי הוא יחיד מכיוון שע"פ ההנחה, כל איברי A הם בפרט חד משמעיים במובן של ההוכחה המקורית של למת הבידוד. נסמן איבר זה ב־F. עתה, נניח בסתירה שיש שני איברים $G_1, G_2 \in \mathcal{F}$ בעלי אותו משקל שהוא השני הכי קטן ב־$\mathcal{F}$. בלי הגבלת הכלליות, נניח שקיים איבר $a \in A$ השייך ל־G_1 ואינו שייך ל־G_2. עתה קיימים שני מקרים.

אם $a \in F$, אז $W'_a = w(G_1)$, מכיוון שמבין כל איברי $\mathcal{F}$ המכילים את a האיבר F הוא (היחיד) בעל המשקל המינימלי ו־G_1 הוא בעל המשקל השני הכי קטן. בנוסף לכך, $\overline{W}_a = w(G_2) = w(G_1)$, מכיוון שמבין האיברים שאינם מכילים את a האיבר G_2 יהיה בעל המשקל המינימלי (שהרי F אינו נמצא שם). בזאת קיבלנו סתירה ל־$W'_a \neq \overline{W}_a$. באותו האופן, עבור המקרה $a \notin F$ נקבל סתירה ל־$W_a \neq \overline{W}'_a$, ושני המקרים ביחד מסיימים את ההוכחה.

בידוד רב־קבוצות

ההוכחה דומה להוכחה של למת הבידוד הרגילה, רק שכאן נצטרך לשמור $r+1$ ערכים לכל $a \in A$ במקום שניים. נסמן $W_{0,a}, \ldots, W_{r,a}$ כאשר $W_{s,a}$ הוא משקל הרב־קבוצה מ־$\mathcal{F}$ בעלת משקל המינימום מבין אלו המכילות את a בדיוק s פעמים.

נאמר ש־a רב־משמעי אם קיימים $s < t$ כך ש־$W_{s,a} = W_{t,a}$. נניח כי ישנן שתי רב־קבוצות $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ כך שמשקלן מינימלי. קיים איבר a שנמצא ב־F_1 בדיוק s פעמים וב־F_2 מספר פעמים אחר t. כך מתקיים עבור הקבוצות $W_{s,a} = w(F_1) = w(F_2) = W_{t,a}$, כלומר a רב־משמעי. כעת נסמן $V_{s,a} = W_{s,a} - s \cdot w(a)$. ערך זה נקבע לחלוטין על ידי משקלי חברי $A \setminus \{a\}$. כעת, אם ורק אם $W_{s,a} = W_{t,a}$ נקבל $V_{t,a} - V_{s,a} = (s-t)\, w(a)$, וכמו בהרצאה, זה קורה בערך אחד של $w(a)$ לכל היותר ולכן מתרחש בהסתברות של $\frac{1}{c}$ לכל היותר.

מחסם האיחוד על פני s, t, a נקבל שההסתברות לקיום איבר בעל משקל מינימלי יחיד ב־$\mathcal{F}$ היא לפחות $1 - \frac{n}{c}\binom{r+1}{2}$, אבל אנחנו רוצים חסם חזק יותר. לשם כך אנחנו נקבע פונקציית משקל w על $A \setminus \{a\}$ ונראה כי למעשה ישנם לכל היותר r ערכים אפשריים ל־$w(a)$ שיהפכו את a לרב־משמעי.

נקבע את המשקלות כאמור, ונאמר כי i מרבה את s עבור a אם קיים $t > s$ כך שקביעת $w(a) = i$ גורמת לכך ש־$W_{s,a} = W_{t,a}$, ושניהם מינימליים מבין $W_{0,a}, \ldots, W_{r,a}$. נראה כי לכל s יש לכל היותר i אחד שמרבה אותו עבור a (ולכן אין יותר מ־r ערכי j שגורמים לריבוי כל שהוא). נניח על דרך השלילה כי $i < j$ שניהם מרבים את s עבור a. נקבע את $W_{k,a}(i)$ להיות $W_{k,a}$ כאשר אנחנו בוחרים $w(a) = i$. עבור $w(a) = j$ נקבל $W_{k,a}(j) = W_{k,a}(i) + (j-i)\, k$, כי משקל יתר הקבוצה נשאר זהה, ורק הוספנו $j - i$ למשקל של a, שיש לו k מופעים. לכן לכל $t' > s$ אנחנו מקבלים

$$\begin{aligned} W_{t',a}(j) - W_{s,a}(j) &= W_{t',a}(i) - W_{s,a}(i) + \left(t' - s\right)(j-i) \\ &> W_{t',a}(i) - W_{s,a}(i) \geq 0 \end{aligned}$$

כשהאי שוויון האחרון הוא מכיוון ש־i מרבה את s ולכן $W_{s,a}(i)$ הוא מינימלי מבין ה־$W_{k,a}(i)$. לכן אין אף t' שיכול לגרום לכך ש־j ירבה את s עבור a.

כעת נראה את הדוגמה שמראה שלא נוכל לשפר זאת ל $1 - \frac{n}{c}$. הדוגמא תהיה עם $n = 2, c = 3$ וההסתברות תהיה 0. נראה משפחה של רב־קבוצות מעל $A = \{a, b\}$ עבורה כל פונקציית משקל $w : A \to \{1, 2, 3\}$ תתן שתי

רב־קבוצות ממשקל זהה. נסמן ב (i,j) את הרב־קבוצה המכילה i מופעים של a ו־j מופעים של b. המשפחה שנגדיר היא $\mathcal{F} = \{(13,0),(10,1),(8,2),(5,4),(4,5),(2,8),(1,10),(0,13)\}$. אפשר לוודא את התכונה על פני מעבר על פני תשע פונקציות המשקל האפשריות.

המומנט השני

הפרדה ע"י פונקציה לינארית

תהי $A \subseteq \{0,1\}^n$ קבוצה כל שהיא בת k איברים בקוביה הבוליאנית ה־n מימדית. הראו שקיימת פונקציה לינארית $f : (\mathbb{Z}_2)^n \to \mathbb{Z}_2$ כך שמתקיים עבור מספר האיברים ב־A המאפסים את הפונקציה הבוליאנית f אי השוויון $|\{v \in A | f(v) = 0\}| = \frac{1}{2}k \pm O(\sqrt{k})$.

תתי גרפים של גרפים צפופים

נתון גרף G כל שהוא אשר מספר הקשתות שלו הוא αn^2 עבור $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ מתאים. נגריל תת גרף מושרה מקרי H, ע"י כך שכל צומת של G תיבחר להיות צומת של H בהסתברות $\frac{1}{2}$, באופן ב"ת בצמתים האחרים. הראו שבסיכוי $1-o(1)$ מספר הקשתות ב־H הוא $\frac{1}{4}\alpha n^2 + o(n^2)$.

פסוקיות לא מאוד מסופקות

הראו שלכל ϵ קיים קבוע C, כך שלכל נוסחת 3-NAE-SAT עם n משתנים ו־$m > Cn$ פסוקיות קיימת הצבה המספקת לפחות $(\frac{3}{4}+\epsilon)m$ ולא יותר מ־$(\frac{3}{4}-\epsilon)m$ מהפסוקיות. פסוקית של 3-NAE-SAT מסתפקת אם לא כל שלושת הליטרלים מקבלים אותו ערך (ז"א אם לא כולם אפס ולא כולם אחד), וההנחה היא שכל פסוקית תלויה בדיוק בשלושה משתנים שונים.

ריכוז במרחב

נביט במרחב הוקטורי $\mathbb{Z}_p^n$ (מעל השדה $\mathbb{Z}_p$) עבור $p \geq 3$ ראשוני ו־$n \geq 2$. נתונה קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}_p^n \setminus \{0\}$ כך ש־$|A| = \frac{p^n-1}{2}$. נבחר תת מרחב U ממימד 2 יוניפורמית. הראו, עבור p גדל ובאופן ב"ת ב־n, כי בהסתברות $1-o(1)$ מתקיים שגודל החיתוך $A \cap U$ הוא בין $\left(\frac{1}{2}-o(1)\right)(p^2-1)$ לבין $\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)(p^2-1)$.

פתרונות לתרגילים על המומנט השני

הפרדה ע"י פונקציה לינארית

אנו נגריל את f באופן מקרי. כזכור, כל פונקציה לינארית מ־$(\mathbb{Z}_2)^n$ ל־$\mathbb{Z}_2$ נתונה ע"י ווקטור $u \in \mathbb{Z}_2$, כך שלכל $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ מתקיים $f(v) = u \cdot v$ (הכפל הוא כפל ווקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$). אנו נגריל את u באופן יוניפורמי (כל קורדינטה באופן ב"ת באחרות).

לכל $v \in A$ נסמן ב־X_v את משתנה האינדיקטור עבור המאורע ש־$f(v) = 0$. מתקיים $\mathrm{E}[X_v] = \frac{1}{2}$, וכן לכל $w \neq v$ המ"מ X_v ו־X_w הם בלתי תלויים בזוגות. להוכחת הטענה השניה נניח בלי הגבלת הכלליות שמתקיים $v_n = 0$ ו־$w_n = 1$: ניתן להניח בה"כ שקיימת קורדינטה i שמתאפסת ב־v ולא ב־w (אחרת נחליף את v ו־w),

והטיעון הוא זהה אם $i = n$. עתה נחשב (למשל) את $\Pr[X_v = 1 \wedge X_w = 1]$ באמצעות נוסחת ההסתברות השלמה באופן הבא:

$$\begin{aligned}\Pr[X_v = 1 \wedge X_w = 1] &= \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \\ v\cdot(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},0)=1}} \Pr[u_1 = \alpha_1, \ldots, u_{n-1} = \alpha_{n-1}]\Pr[w \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, u_n) = 1] \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \\ v\cdot(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},0)=1}} 2^{1-n} \cdot \frac{1}{2} = 2^{n-2} \cdot 2^{1-n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

מכך נובע שהמ"מ המתאר את מספר איברי A המאפסים את f, הנתון ע"י $X = \sum_{v\in A} X_v$, מקיים $\mathrm{E}[X] = \frac{k}{2}$ וכן $\mathrm{V}[X] = \frac{k}{4}$. ממשפט צ'בישף נובע עתה שבהסתברות גדולה מ־0 יתקיים (למשל) $|X - \frac{k}{2}| \leq \sqrt{k}$, ולכן קיימת פונקציה f המקיימת את המבוקש.

תתי גרפים של גרפים צפופים

נסמן את קבוצת הקשתות של G ב־E, ולכל $e \in E$ נגדיר את המשתנה X_e להיות שווה ל־1 אם הקשת e מוכלת בתת הגרף H שנבחר (ז"א ששני הצמתים שלה נבחרו כצמתים של H), ושווה ל־0 אחרת. לבסוף נגדיר את $X = \sum_{e\in E} X_e$, ונשים לב שמ"מ זה זהה בערכו למספר הקשתות של H. מלינאריות התוחלת, $\mathrm{E}[X] = \sum_{e\in E} \mathrm{E}[X_e] = \frac{1}{4}\alpha n^2$. עתה נחסום את $\mathrm{V}[X]$.

עתה נרשום $\mathrm{V}[X] = \sum_{e,f\in E} \mathrm{Cov}[X_e, X_f]$. אם e ו־f זרות צמתים אז $\mathrm{Cov}[X_e, X_f] = 0$, ואחרת עדיין מתקיים $\mathrm{Cov}[X_e, X_f] < 1$ (לא צריך כאן חסם יותר טוב). סה"כ קיבלנו $\mathrm{V}[X] < 2|E|n \cdot 1 \leq n^3$. ממשפט צ'בישף נובע עתה $\Pr\left[|X - \frac{1}{4}\alpha n^2| > n^{7/4}\right] < n^{-1/2}$, ז"א שבסיכוי $1 - o(1)$ מתקיים $X = \frac{1}{4}\alpha n^2 \pm n^{7/4} = \frac{1}{4}\alpha n^2 + o(n^2)$ כנדרש.

פסוקיות לא מאוד מסופקות

אנו נגריל הצבה לקבוצת המשתנים $x_1, \ldots, x_n$ של המשתנים באופן יוניפורמי וב"ת. נסמן ב־X_i את משתנה האינדיקטור עבור המאורע "הפסוקית ה־i הסתפקה", וב־$X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ את המ"מ של מספר הפסוקיות שהסתפקו. באופן דומה למה שחושב עבור SAT בכתה מתקיים $\mathrm{E}[X] = \frac{3}{4}m$, ומייד נוכיח עבור בחירה מתאימה של C שיתקיים $\mathrm{V}[X] \leq \frac{1}{4}\epsilon^2 m^2$. מכאן ינבע לפי חוק צ'בישף שבסיכוי לפחות $\frac{3}{4}$ ההצבה שלנו תהיה כנדרש.

ראשית נחשב את $\mathrm{Cov}[X_i, X_j]$ לפי ניתוח למקרים:

- אם לפסוקיות ה־i וה־j אין יותר ממשתנה אחד משותף, אז שני מאורעות ההסתפקות הם בלתי תלויים זה בזה (בגלל שידיעת ערך של משתנה אחד אינה משנה את סיכוי ההסתפקות של פסוקית NAE), ולכן מתקיים $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0$.
- אם לשתי הפסוקיות יש שלושה משתנים משותפים וזו אינה אותה פסוקית אז הקוריאנס אינו חיובי, $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] \leq 0$. אם זוהי אותה פסוקית, ז"א ש־$i = j$, אז הקוריאנס זהה לשונות של X_i, שהיא קטנה מ־1 (הערה: היפוך שלושת הליטרלים מביא אותנו למצב של "אותה פסוקית", אם כי זה לא משנה הרבה את החישוב אם אנו מרשים כאלו כפילויות גם).

- אם יש שני משתנים משותפים בדיוק, אז למרות שניתן לחסום באופן יותר מדוייק נסתפק בחסם הפשוט $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = \mathrm{E}[X_i X_j] - (\frac{3}{4})^2 < 1$. מספר הזוגות של פסוקיות כאלו חסום ע"י $24m(n-3) < 24mn$ (עבור פסוקית מסויימת יש 3 בחירות של זוג משתנים להחתך בהם איתה, ולכל אחת מהן 4 אפשרויות לסימנים עבורם, $n-3$ דרכים לבחור את האיבר הנוסף בפסוקית שחותכת אותה, ושתי אפשרויות לסימן שלו).

עתה ניתן לחסום את השונות של X:

$$\mathrm{V}[X] = \sum_{1 \le i,j \le m} \mathrm{Cov}[X_i, X_j] < 0 + m + 24mn < 25mn$$

לסיום ההוכחה, בוחרים $C = 100\epsilon^{-2}$, על מנת שיתקיים $25mn = \frac{1}{4}\epsilon^2 Cnm < \frac{1}{4}\epsilon^2 m^2$.

ריכוז במרחב

מסתכלים על תת המרחב כתוצאה מבחירה יוניפורמית של שני ווקטורים ב"ת $u, v \in \mathbb{Z}_p^n$ ומעבר לתת המרחב הנפרש (מספר הבסיסים הפורשים זהה לכל תת מרחב אפשרי ממימד 2, ולכן זו תהיה בחירה יוניפורמית של תת המרחב), ואז עבור כל α, β שאינם שניהם 0 מגדירים את $X_{\alpha,\beta}$ כמשתנה האינדיקטור עבור המאורע "$\alpha u + \beta v \in A$". נשים לב שגודל החיתוך של תת המרחב עם A נתון ע"י $X = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_p} X_{\alpha,\beta}$, וכן שמתקיים $\mathrm{E}[X_{\alpha,\beta}] = \frac{1}{2}$ לכל α, β ולכן $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}(p^2-1)$.

המשתנים $X_{\alpha,\beta}$ ו־$X_{\alpha',\beta'}$ הם ב"ת (כזוג) אם (α,β) ו־(α',β') הם ב"ת (כזוג ווקטורים ב־$\mathbb{Z}_p^2$). זה אומר שיש לא יותר מ־$(p-1)(p^2-1)$ זוגות משתנים תלויים, ולאלו הקוריאנס חסום ע"י $\frac{1}{2}$. על כן מתקיים עבור p גדול דיו $\mathrm{V}[X] = \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'} \mathrm{Cov}[X_{\alpha,\beta}, X_{\alpha',\beta'}] \le \frac{1}{2}(p-1)(p^2-1) < (p^2-1)^{3/2}$. עתה אפשר לסיים ע"י שימוש באי שוויון צ'בישף: $\Pr[|X - \frac{1}{2}(p^2-1)| > (p^2-1)^{7/8}] < (p^2-1)^{-1/4} = o(1)$, כאשר בפרט $(p^2-1)^{7/8} = o(p^2-1)$.

חסימת סטיות גדולות

חיפוש בינארי עם מעט שקרים

נזכיר את האלגוריתם (הדטרמיניסטי) לחיפוש איבר נתון ברשימה ממוינת בת n איברים באמצעות $\lceil \log_2 n \rceil$ השוואות: מתחילים מהתחום $\{1, \ldots, n\}$. בכל שלב משווים את האיבר הנתון עם האיבר האמצעי בתת הרשימה המתאימה לתחום, ובהתאם עוברים לתת־תחום שגודלו כחצי מגודל התחום בסוף השלב הקודם.

עתה נניח שאנו רוצים לחפש איבר נתון ברשימה ממוינת, אולם כל פעם שאנו משווים את האיבר הנתון עם איבר ברשימה, בסיכוי של 1% נקבל את התשובה ההפוכה לאמת. ליתר דיוק: אין לנו יכולת לקרוא את האיברים מהרשימה אלא רק להשוות אותם. אם תוצאת ההשוואה היא "$<$" אז בסיכוי 1% נקבל את התשובה "$>$", ואם תוצאת ההשוואה היא "$>$" אז בסיכוי 1% נקבל את התשובה "$<$". לא יהיו תשובות שגויות אף פעם ביחס ל־"$=$".

כתבו אלגוריתם שמוצא את האיבר ברשימה הממוינת, אשר רץ בתוחלת זמן שהיא עדיין $O(\log n)$. מותר להניח שהאיבר הנתון אכן קיים ברשימה, ויש להקפיד שניתוח זמן הריצה אכן יהיה נכון ביחס לתוחלת (לא רק "בהסתברות גבוהה הזמן הוא קצר").

מחלקות סיבוכיות

המחלקה BPP מוגדרת כמחלקת השפות שעבורן קיים אלגוריתם הסתברותי אשר רץ בזמן פולינומי, ונותן את התשובה הנכונה בהסתברות $\frac{2}{3}$. המחלקה $\mathrm{P/poly}$ מוגדרת כמחלקת השפות כך שלכל n קיים אלגוריתם דטרמיניסטי אשר רץ בזמן פולינומי ונותן את התשובה הנכונה לכל קלט מאורך n: שימו לב שבניגוד ל־P, זה אינו חייב להיות אותו אלגוריתם ל־n שונים; רק חסם הזמן הפולינומי חייב להיות אחיד לכל ה־n, וכן הוא חייב לחסום את אורך התיאור של האלגוריתם הספציפי ל־n. הוכיחו שמתקיים $\mathrm{BPP} \subseteq \mathrm{P/poly}$.

תתי קבוצות מקריות

נניח שאנו מגרילים $2n$ תתי קבוצות מגודל 3 של $\{1,\ldots,n\}$, כשכל קבוצה לכשעצמה מוגרלת יוניפורמית מכל תתי הקבוצות האפשריות באופן ב"ת בקבוצות האחרות. הראו שבסיכוי $1-e^{-\Theta(n)}$ ניתן לבחור n קבוצות מתוכן כך שאף איבר של $\{1,\ldots,n\}$ לא יופיע ביותר מ־40 קבוצות שונות.

קליקים בממוצע

נבחר גרף לפי $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$. הראו כי לכל k קבוע בהסתברות של לכל היותר $e^{-\Theta(n)}$ מספר ה־k־קליקים בגרף יהיה יותר מ־$\binom{n}{k}\cdot 2^{-\binom{k}{2}+1}$ או פחות מ־$\binom{n}{k}\cdot 2^{-\binom{k}{2}-1}$.

פתרונות לתרגילים על חסימת סטיות גדולות

חיפוש בינארי עם מעט שקרים

נבצע כאן גרסא של אלגוריתם החיפוש הבינארי הרגיל, אולם עם תוספת אפשרות של "חזרה לאחור": בשלב הראשון נתחיל עם הקטע $\{1,\ldots,n\}$ כמו באלגוריתם הרגיל. עתה בכל שלב, כאשר בידינו הקטע $\{a,\ldots,b\}$, נבצע השוואה עם איבר הרשימה במקום ה־$\lfloor\frac{a+b}{2}\rfloor$ כמו באלגוריתם הרגיל, אולם בנוסף לכך נבצע השוואה גם עם המקום ה־a וגם עם המקום ה־b. אם קיבלנו שוויון, נעצור כמו באלגוריתם הרגיל (זכרו את ההנחה בשאלה שאף פעם אין תוצאה שקרית ביחס לשוויון). אם תוצאות שלושת ההשוואות מתאימות להנחה שהאיבר נמצא בתחום המקומות $\{a,\ldots,\lfloor\frac{a+b}{2}\rfloor\}$ או נמצא בתחום המקומות $\{\lfloor\frac{a+b}{2}\rfloor+1,\ldots,b\}$, אז נעבור לחצי הקטע המתאים כפי שהדבר נעשה באלגוריתם החיפוש הבינארי. לבסוף, אם תוצאות ההשוואות מראות שהאיבר המבוקש אינו נמצא כלל בתחום $\{a,\ldots,b\}$, או ששלושת התוצאות אינן קונסיסטנטיות, אז "נחזור לאחור": במקרה זה אנו נגדיל את הקטע חזרה למה שהיה לפני ההקטנה האחרונה (בכל שלב אנו נשמור את ההסטוריה של כל הקטעים עד הקטע הנוכחי שלא חזרנו מהם). אם מצב זה קורה עבור הקטע $\{1,\ldots,n\}$ אז אי אפשר לחזור לאחור, ואז פשוט נשאיר אותו כמות שהוא לאיטרציה הבאה.

עתה ננתח את תוחלת זמן הריצה. אנו נקרא לצעד של האלגוריתם "נכון" אם קרה אחד משני הדברים הבאים: או שהאיבר המבוקש אכן נמצא בתחום המקומות $\{a,\ldots,b\}$ ואנו אכן חצינו את הקטע לתת הקטע המכיל את האיבר, או שהאיבר אינו נמצא בתחום $\{a,\ldots,b\}$ ואנו אכן בצענו צעד לאחור. לכל אפשרות אחרת נקרא "צעד לא נכון". לשם פשטות הניתוח, כאשר האלגוריתם מוצא את האיבר ועוצר, אנו נניח שהוא ממשיך לבצע "צעדים נכונים" בהסתברות 1.

שימו לב שבכל שלב של האלגוריתם, ההסתברות לצעד נכון היא לפחות 97% (ההסתברות הספציפית יכולה להיות תלויה בצעדים קודמים, אבל לא החסם). בנוסף לכך, ברגע שההפרש בין מספר הצעדים הנכונים ומספר הצעדים הלא־נכונים עולה על $\lceil\log_2 n\rceil$ לטובת הנכונים הרי שהאלגוריתם עצר בהצלחה (יתכן כי הוא כבר עצר בהצלחה קודם לכן). לפי חסימת סטיות גדולות, הסיכוי שזה לא קרה עבור $t\geq 10\log_2 n$ צעדים (שימו לב שתוחלת ההפרש

בין הצעדים הנכונים ללא־נכונים היא לפחות $\frac{94}{100}t$) הוא לא יותר מ־$e^{-t/10}$ (בעצם הרבה פחות אבל התעלמנו כאן מקבועים מדויקים): מביטים בסדרת משתנים מקריים המקבלים 1 בצעד נכון ו־-1 בצעד לא נכון, וחוסמים בעזרת חסם סטיות גדולות מתאים. נסמן לבסוף ב־T את המ"מ שמקבל את מספר הצעדים שלקח לאלגוריתם לעצור, ונקבל:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[T] &= \sum_{t=1}^{\infty} t\Pr[T=t] = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}\Pr[T=j] = \sum_{t=1}^{\infty}\Pr[T\geq t] \\
&\leq \lceil 10\log_2 n\rceil + \sum_{t=\lceil 10\log_2 n\rceil}^{\infty}\Pr[T\geq t] \\
&\leq \lceil 10\log_2 n\rceil + \sum_{t=\lceil 10\log_2 n\rceil}^{\infty} e^{-t/10} = O(\log_2 n)
\end{aligned}$$

מחלקות סיבוכיות

נניח ש־L היא שפה השייכת ל־BPP, ונוכיח שהיא ב־P/poly. נניח ש־$p(n)$ הוא חסם זמן פולינומי עבור אלגוריתם הסתברותי המכריע את L, וכן נניח שאלגוריתם זה משתמש רק בבחירות יוניפורמיות ב"ת מתוך $\{0,1\}$ ("הטלות מטבע"). לביסוס ההנחה אפשר להשתמש בשאלה "סימולציה של הסתברות" מפרק התרגילים על השיטה הבסיסית. לכל n נבנה אלגוריתם דטרמיניסטי שנותן תשובות נכונות עבור כל המילים מאורך n, כך שגם זמן הריצה וגם אורך התיאור שלו חסומים ע"י החסם הפולינומי $O(np(n))$.

האלגוריתם ההסתברותי המקורי משתמש עבור מילים מאורך n בלא יותר מ־$p(n)$ מטבעות (הגרלות יוניפורמיות ב"ת מ־$\{0,1\}$), ולכן ניתן לתאר אותו ע"י בחירה מקרית יוניפורמית של מחרוזת ב־$\{0,1\}^{p(n)}$, שבהסתמך עליה ועל הקלט האלגוריתם מגיע להכרעה דטרמיניסטית (כל פעם שהאלגוריתם אמור להטיל מטבע, קוראים במקום זאת את הערך הבא מהמחרוזת שהוגרלה).

עתה נגריל באופן ב"ת $100n$ מחרוזות בינאריות מאורך $p(n)$ שנסמנן $\alpha_1,\ldots,\alpha_{100n}$, ונבחן את $100n$ ההרצות האפשריות של האלגוריתם המתקבלות מהן. אם $a\in\{0,1\}^n$ היא מילה בשפה, אז לפי חסימת סטיות גדולות, הסיכוי שהיא תתקבל עבור לא יותר מ־$51n$ מההרצות הנ"ל חסום ע"י 2^{-n-1} (ולמעשה פחות מכך). בדומה לכך, אם $a\in\{0,1\}^n$ אינה ב־L אז הסיכוי שהיא תתקבל עבור לא פחות מ־$49n$ מההרצות חסום ע"י 2^{-n-1}.

מכאן נובע שקיימת בחירה של $\alpha_1,\ldots,\alpha_{100n}$ שעבורה לכל מילה $w\in\{0,1\}^n$, מילה זו מתקבלת ע"י רב ההרצות המתאימות ל־$\alpha_1,\ldots,\alpha_{100n}$ אם ורק אם $w\in L$. עתה אנו יכולים להרכיב את האלגוריתם שלנו עבור מילים מאורך n עבור הבחירה הנ"ל (שתהווה חלק מתיאור האלגוריתם): בהינתן $w\in\{0,1\}^n$, לכל α_i נבצע את ההרצה המתאימה (באופן דטרמיניסטי בהסתמך על a ו־α_i) ונכתוב את התשובה. האלגוריתם שלנו יקבל את w אם ורק אם לפחות $50n$ מההרצות הנ"ל קיבלו את המילה a.

תתי קבוצות מקריות

נסמן את תתי הקבוצות המקריות ב־$A_1,\ldots,A_{2n}$, ולכל $1\leq i\leq 2n$ נסמן ב־X_i את משתנה האינדיקטור עבור המאורע ש־A_i מכילה לפחות איבר אחד מ־$\{1,\ldots,n\}$ שמוכל בלפחות 40 מהקבוצות $A_1,\ldots,A_{i-1}$. אם בסוף נבחר את תתי הקבוצות $\{A_i|X_i=0\}$, הרי שאלו יקיימו את התנאי הנדרש על מספר המופעים של איברי $\{1,\ldots,n\}$, ולכן עלינו להוכיח שבסיכוי חסום ע"י $e^{-\Theta(n)}$ בלבד יהיו פחות מ־n קבוצות כאלו, דבר השקול לביטוי $X=\sum_{i=1}^{2n}X_i>n$.

לפי ספירה פשוטה, מספר האיברים מ־$\{1,\ldots,n\}$ המשתתפים בלפחות 40 קבוצות מ־$A_1,\ldots,A_{i-1}$ לעולם אינו עולה על $\frac{3}{20}n$. על כן, אפילו ש־X_i תלוי ב־$X_1,\ldots,X_{i-1}$, יתקיים $\Pr[X_i = 1|X_1,\ldots,X_{i-1}] \leq \frac{9}{20}$ (לכל סדרת ערכים אפשרית עבור $X_1,\ldots,X_{i-1}$).

על מנת לחסום את $X = \sum_{i=1}^{2n} X_i$ נגדיר $Y_1,\ldots,Y_{2n}$ אשר יהיו ב"ת זה בזה לחלוטין (אבל תלויים ב־$X_1,\ldots,X_{2n}$) ושעבורם יתקיים $Y_i \geq X_i$ וכן $\Pr[Y_i] = \frac{9}{20}$. נבנה את אלו באינדוקציה, את Y_i נגדיר לאחר שהוגרלו $X_1,\ldots,X_i$ ו־$Y_1,\ldots,Y_{i-1}$ (ונדאג לאי תלות של ההסתברויות עבור Y_i בערכים של $Y_1,\ldots,Y_{i-1}$).

בהינתן הערכים $X_1 = \alpha_1,\ldots,X_{i-1} = \alpha_{i-1}$ ו־$p_i = \Pr[X_i = 1|X_1 = \alpha_1,\ldots,X_{i-1} = \alpha_{i-1}]$, נבדוק עתה את ערך X_i. אם $X_i = 1$ אז נגדיר $Y_i = 1$, ואם $X_i = 0$ אז בהסתברות $\frac{11}{20(1-p_i)}$ נגדיר $Y_i = 0$ ובהסתברות $\frac{9-20p_i}{20(1-p_i)}$ נגדיר $Y_i = 1$. הדבר לשים לב אליו הוא ש־Y_i יהיה שווה ל־1 בהסתברות $\frac{9}{20}$ באופן ב"ת בערכי $X_1,\ldots,X_{i-1}$ או ערכי $Y_1,\ldots,Y_{i-1}$. לכן קבוצת כל ה־Y_i היא ב"ת (במובן שמתקיים למשל $\Pr\left[\bigwedge_{j=1}^{i}(Y_j = 1)\right] = (\frac{9}{20})^i$). עתה ניתן לחסום את $\Pr[X > n]$ ע"י $\Pr[\sum_{i=1}^{2n} Y_i > n]$, וזה חסום ע"י $e^{-\Theta(n)}$ באמצעות חסימת סטיות גדולות.

קליקים בממוצע

נראה כאן באינדוקציה שלכל k ו־$1 > c > 0$ קיים $\alpha(c,k) > 0$ כך שעבור n גדול דיו, בהסתברות של לכל היותר $e^{-\alpha n}$, מספר ה־k־קליקים יהיה פחות מ־$(1-c)2^{-\binom{k}{2}}\binom{n}{k}$ או יותר מ־$(1+c)2^{-\binom{k}{2}}\binom{n}{k}$. טענת השאלה נובעת מהצבת $c = \frac{1}{2}$. בסיס האינדוקציה, $k = 1$, הוא טריביאלי (תמיד יהיו בדיוק n "1־קליקים").

נניח שהטענה הוכחה עבור $k-1$. ראשית נראה שלכל $1 > c > 0$ ו־n גדול דיו, בהסתברות של לכל היותר $e^{-\beta n}$, עבור $\beta(c,k) > 0$ מתאים, ישנה קבוצה "רעה" U בת $k-1$ צמתים כך שמספר הצמתים $v \notin U$ אשר מחוברים לכל איברי U לא נמצא בין $(1-c)2^{1-k}(n+1-k)$ ל־$(1+c)2^{1-k}(n+1-k)$ (כלומר חורג מהאמור בטענה). נסמן ב־$A_{v,U}$ את המאורע ש־$v \notin U$ מחובר לכל צמתי U. $\Pr[A_{v,U}] = 2^{1-k}$, ועבור U קבוע, המאורעות $\{A_v : v \in V \setminus U\}$ הם ב"ת לחלוטין זה בזה. לכן, מחסימת סטיות גדולות, קיים $\beta'(c,k) > 0$ כך שבהסתברות לכל היותר $e^{-\beta' n}$ מספר הצמתים $v \notin U$ המחוברים לכל איברי U לא נמצא בין $(1-c)2^{1-k}(n+1-k)$ ל־$(1+c)2^{1-k}(n+1-k)$. מכיוון שמספר הקבוצות U הרלוונטיות הוא $\binom{n}{k-1}$, ניתן להפעיל את חסם האיחוד ולקבל כי קיים $\beta(c,k) > 0$ כך שעבור n גדול דיו בהסתברות של לכל היותר $e^{-\beta n}$ קיימת קבוצה "רעה".

אם עתה נספור את כל הזוגות של $(k-1)$־קליק פלוס צומת נוסף המשלים אותו ל־k־קליק, נקבל מהטענה לעיל והנחת האינדוקציה (מופעלים שניהם עם $c/3$) שעבור n גדול דיו ההסתברות שמספר הזוגות לא יהיה בין $(1-c)2^{-\binom{k}{2}}k\binom{n}{k}(n+1-k) = (1-c)2^{-\binom{k-1}{2}}2^{1-k}\binom{n}{k-1}(n+1-k)$ לבין $(1+c)2^{-\binom{k}{2}}k\binom{n}{k}$ היא חסומה ע"י $e^{-\alpha(c/3,k-1)n} + e^{-\beta(c/3,k)n}$ (שכן $(1+c/3)^2 \leq 1+c$ ו־$(1-c/3)^2 \geq 1-c$ תחת ההנחה ש־$0 < c < 1$). אם נשים לב שמספר הזוגות הנ"ל הוא בדיוק k פעמים מספר ה־k־קליקים בגרף, נוכל לסיים ע"י ההצבה $\alpha(c,k) = \frac{1}{2}\min\{\alpha(c/3,k-1), \beta(c/3,k)\}$.

מרטינגלים

הילוך מקרי על הקוביה

על הקוביה הבוליאנית $\{0,1\}^n$ נגדיר הילוך מקרי מהראשית: $\underline{x}^{(0)}$ יהיה הווקטור שכולו אפסים, ובהינתן $\underline{x}^{(i)}$, נגדיר את $\underline{x}^{(i+1)}$ ע"י זה שנבחר באופן יוניפורמי (וב"ת בבחירות קודמות) אינדקס $1 \leq j_i \leq n$, ואז נהפוך את ערכו של האיבר ה־j_i ב־$\underline{x}^{(i)}$. נסמן ב־d_i את המרחק מהראשית של $\underline{x}^{(i)}$, ז"א את מספר האחדות שבו. הראו שמתקיים:

$$\Pr\left[d_n < \frac{1}{2}\mathrm{E}[d_n]\right] \leq 2^{-\Omega(n)}$$

הערה: אפשר לפתור זאת מבלי לחשב במדויק את $\mathrm{E}[d_n]$, אבל כמובן שצריך לדאוג לאיזה שהוא חסם על גודל התוחלת הנ"ל.

מרחק מקבוצת נקודות

נניח ש־$A \subseteq \{0,1\}^n$ היא קבוצה בת לפחות $\frac{1}{100}2^n$ נקודות. הראו שלפחות $\frac{99}{100}2^n$ מנקודות הקוביה $\{0,1\}^n$ נמצאות במרחק שאינו עולה על $8\sqrt{n}$ מ־A, כאשר המרחק בין שתי נקודות מוגדר ע"י מספר הקורדינטות שבהן הן נבדלות (מרחק Hamming ללא נרמול).

בחירה של תתי קבוצות

נתון ש־A היא ת"ק מקרית של $\{1,\ldots,n\}$. לא נתון כלום על מרחב ההסתברות שלפיו בוחרים את A, פרט לכך שזוהי בהסתברות 1 קבוצה בת k איברים שונים זה מזה (k הוא קבוע נתון), וכן שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\Pr[i \in A] = \frac{k}{n}$. הראו שעבור $(1-o(1))2^n$ מתתי הקבוצות $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ מתקיים $\Pr[A \subseteq S] = 2^{-k} \pm o(1)$.
רמז: ניתן להסתכל על $\Pr[A \subseteq S]$ כעל כמות התלויה ב־S, ולנתח את ההתפלגות עבור בחירה מקרית יוניפורמית של S.

צביעת גרף מושרה על קבוצה מקרית

נניח ש־$G = (V,E)$ הוא גרף שמספר הצביעה שלו הוא בדיוק 1000. נניח ש־V' היא תת קבוצה של V שנבחרת אקראית ויוניפורמית (כל צומת ב־V נבחר עבור V' בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת). יהי G' תת הגרף המושרה על V'. הראו שבסיכוי $\frac{99}{100}$ לפחות מתקיים $\chi(G') \geq 400$. כדאי קודם להראות שמתקיים $\mathrm{E}[\chi(G')] \geq 500$.

פתרונות לתרגילים על מרטינגלים

הילוך מקרי על הקוביה

נגדיר מרטינגל חשיפה $D_0,\ldots,D_n$ עבור המרחק d_n, כאשר בצעד ה־i חושפים את j_i (ולכן את $\underline{x}^{(0)},\ldots,\underline{x}^{(i)}$). שימו לב שבד"כ D_i אינו שווה ל־d_i עבור $i < n$ (אבל כמובן $D_n = d_n$). לא קשה לראות שהמרטינגל מקיים את תנאי ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ 2, ולכן ממשפט אזומה מתקיים $\Pr[D_n < \mathrm{E}[D_n] - \alpha n] \leq 2^{-\Omega(n)}$ לכל $\alpha > 0$. על מנת להשלים את ההוכחה על כן צריך רק להראות שמתקיים $\mathrm{E}[D_n] = \Omega(n)$.

הסיכוי שאיבר i נבחר בדיוק פעם אחת הוא לפחות $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - 1$ (הסיכוי שיבחר לפחות פעם אחת הוא $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ והסיכוי שיבחר פעמיים ומעלה הוא לכל היותר $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ מחסם האיחוד), עבור n גדול דיו ערך זה הוא לפחות $\frac{1}{10}$, ולכן מלינאריות התוחלת עבור n גדול דיו מתקיים $\mathrm{E}[D_n] \geq \frac{n}{10}$.

מרחק מקבוצת נקודות

הרעיון כאן הוא להראות שכאשר מגרילים באופן יוניפורמי נקודה $x = (x_1,\ldots,x_n)$ מ־$\{0,1\}^n$, בהסתברות לפחות $\frac{99}{100}$ המרחק שלה מ־A לא יעלה על $8\sqrt{n}$. לשם כך נסתכל על הנקודה המקרית כעל פונקציה מקרית באופן יוניפורמי מ־$\{1,\ldots,n\}$ ל־$\{0,1\}$, ונבנה מרטינגל חשיפה ביחס לפונקצית המרחק של x מ־A. המרטינגל "יחשוף" קורדינטה אחת בכל שלב, ז"א שהחשיפה תיעשה ביחס לתחום $\mathcal{D}_i = \{1,\ldots,i\}$ לכל $0 \leq i \leq n$. שימו לב שבמרטינגל $X_0,\ldots,X_n$ המתקבל כך, הערך של X_i אינו מקבל את המרחק של הצמצום $(x_1,\ldots,x_i)$ מהצמצום

המתאים של נקודות A. הערך של X_i שווה לתוחלת המותנה של המרחק הכולל בהינתן הערכים של $x_1, \ldots, x_i$, בהתאם להגדרה של מרטינגל חשיפה.

בחירת ערכי x על הקורדינטות היא ב"ת, ולכן לא קשה לראות שמתקיים תנאי ליפשיץ עבור המרטינגל מקיום תנאי ליפשיץ עבור התחומים: אם שתי נקודות נבדלות ביניהן רק על $\mathcal{D}_i \setminus \mathcal{D}_{i-1} = \{i\}$, אז המרחקים שלהן מ־$A$ בוודאי לא נבדלים ביותר מ־1. מכאן נובע ע"י אי שוויון Azuma שהסיכוי שמרחק זה יהיה קטן מהתוחלת שלו ביותר מ־$4\sqrt{n}$ אינו עולה על $e^{-8} < \frac{1}{100}$. מצד שני, בסיכוי לפחות $\frac{1}{100}$ המרחק המתקבל הוא 0, כי זהו הסיכוי ש־$x \in A$, ולכן תוחלת המרחק של x מ־A אינה עולה על $4\sqrt{n}$. מכאן נובע שבסיכוי לפחות $\frac{99}{100}$ (ע"י שימוש נוסף באי שוויון Azuma), המרחק של x מ־A אינו עולה בעצמו על $8\sqrt{n}$.

בחירה של תתי קבוצות

לכל $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ נגדיר $p(S) = \Pr[A \subseteq S]$, ונגדיר את $X_0, \ldots, X_n$ להיות מרטינגל החשיפה של S כאשר מחשיבים אותה כפונקציה מקרית מ־$\{1, \ldots, n\}$ ל־$[0, 1]$ (ז"א ש־X_i יתאר את התוחלת המותנה של $p(S)$ עבור S מקרית בהינתן $S \cap \{1, \ldots, i\}$).

ברור שמתקיים $X_0 = \mathrm{E}[p(S)] = 2^{-k}$ (כי הסיכוי ל $A \subseteq S$ הוא 2^{-k} לכל A בגודל k), וכן מתקיים בהסתברות 1 התנאי $|X_i - X_{i-1}| \leq \frac{k}{n}$: זה מתקיים בגלל קיום של "תנאי ליפשיץ" מתאים, שהרי אם S ו־S' נבדלות ביניהן רק על הקואורדינטה ה־i, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש־$S' = S \setminus \{i\}$, אז מתקיים $0 \leq p(S) - p(S') \leq \Pr[i \in A] = \frac{k}{n}$. מאי שוויון Azuma נובע עתה שבהסתברות $1 - o(1)$ (עבור n גדול דיו ביחס ל־k) המרחק בין X_s ל־X_0 הוא $o(1)$ כנדרש.

צביעת גרף מושרה על קבוצה מקרית

לכל גרף $G = (V, E)$ ולכל קבוצת צמתים $V' \subset V$, נשים לב שמספרי הצביעה של הגרפים המושרים מקיימים $\chi(G) \leq \chi(G[V']) + \chi(G[V - V'])$: מצביעה (חוקית) של $G[V']$ ב־k צבעים וצביעה של $G[V - V']$ ב־l צבעים קל לקבל צביעה של G ב־$k + l$ צבעים (צובעים את איברי V' בקבוצת צבעים זרה לזו שצובעים בה את צמתי $V - V'$). כאשר V' נבחר יוניפורמית מתקיים $\mathrm{E}[\chi(G[V'])] = \mathrm{E}[\chi(G[V - V'])]$, ולכן $2\mathrm{E}[\chi(G[V'])] \geq 1000$.

תהי עתה $c : V \to \{1, \ldots, 1000\}$ צביעה חוקית של G, ותהי $V_i = \{v \in V | c(v) = i\}$. נגדיר את מרטינגל החשיפה הבא: לכל $0 \leq i \leq 1000$, המ"מ X_i יציין את תוחלת מספר הצביעה של $G[V']$ כאשר כבר ידועים $V' \cap V_1, \ldots, V' \cap V_i$ (במילים אחרות, בשלב ה־i אנחנו חושפים את כל הבחירות מ־V_i). בפרט X_0 הוא המ"מ הקבוע $\mathrm{E}[\chi(G[V'])] \geq 500$, ו־$X_{1000}$ הוא המ"מ $\chi(G[V'])$ עצמו. נשים לב שהפונקציה $\chi(G[V'])$ מקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס לחשיפות $V' \cap V_i$, כי כל V_i היא קבוצת צמתים ב"ת, ולכן שינוי ב־$V' \cap V_i$ לא משנה את מספר הצביעה ביותר מאחד. מכאן שאפשר להשתמש באי שוויון Azuma כדי לסיים את הטיעון:

$$\Pr[\chi(G[V']) < 400] \leq \Pr[X_{1000} - X_0 < -\sqrt{10} \cdot \sqrt{1000}] < e^{-5} < \frac{1}{100}$$

(תרגיל זה נכתב במקור ע"י שריאל הר־פלד)

הלמה הלוקלית

צביעת קשתות בגרפים

הראו שלכל d קיים c כך שאם G הוא גרף מדרגה מקסימלית d (ומספר צמתים כל שהוא), אז ניתן לצבוע את הקשתות של G ב־c צבעים כך שבכל המעגלים הפשוטים בגרף יהיו קשתות משלושה צבעים לפחות ("מעגלים

מאורך 2" אינם נחשבים).

קיום תת גרף ספציפי בגרף צפוף

הראו קיום קבוע גלובלי c עם המאפיין הבא: אם H הוא גרף בעל m צמתים ודרגה מקסימלית לכל היותר d, ו־G הוא גרף בעל $n > 2^{cm}$ צמתים ולפחות $(\frac{1}{2} - \frac{1}{cd})n^2$ קשתות, אז G מכיל עותק של H כתת גרף (לא בהכרח מושרה).

הערה: יש משפט ידוע של Erdös ו־Stone על קיום תת גרף כזה עם תנאי אופטימלי על מספר הקשתות של G, אבל עם חסם רע בהרבה על n המינימלי, אשר משתמש בלמת הרגולריות על גרפים (שאותה לא נלמד בקורס זה).

שיפור קל של החסם על משפט רמזי

הראו שקיים גרף בעל $(\sqrt{2}/e - o(1))k2^{k/2}$ צמתים ושאין בו קליק או קבוצה בלתי תלויה בת k צמתים.

צביעות חסכוניות

הראו שגרף G עם דרגה מקסימלית Δ ניתן לצביעה (של הצמתים) ב־$\Theta(\Delta^{3/2})$ צבעים, כך שאין קשתות מופרות (מונוכרומטיות) ובנוסף לכך אין צומת עם שלושה שכנים מאותו צבע.

מילים לא חזרתיות

מילה $y \in \Sigma^{2m}$ נקראת חזרה אם קיימת מילה $x \in \Sigma^m$ כך ש־$y = xx$. מילה $w \in \Sigma^n$ נקראת חזרתית אם היא מכילה תת מילה רצופה שהיא חזרה, ואחרת היא נקראת לא חזרתית. הוכיחו כי מעל א"ב גדול דיו, קיימות מילים לא חזרתיות ארוכות כרצוננו. כלומר, הוכיחו כי קיים $k \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת מילה לא חזרתית מעל א"ב בן k איברים שאורכה הוא לפחות n.

חלוקה בנטל

הראו שלכל k קיים קבוע C_k עם התכונה הבאה: נניח ש־$G = (V, E)$ הוא גרף מכוון, עם דרגת כניסה חסומה ע"י k (ז"א שאף צומת אינו צומת יציאה של יותר מ־k צמתים עם קשת אליו). ניתן אז לחלק את קבוצת הצמתים של G לשתי קבוצות V_1 ו־V_2, כך שגם בגרף המושרה על V_1 וגם בגרף המושרה על V_2, כל צומת v שדרגת היציאה שלו ב־G היתה $d(v) \geq C_k$, דרגת היציאה שלו בגרף המושרה המתאים תהיה בין $\frac{1}{3}d(v)$ לבין $\frac{2}{3}d(v)$.

פתרונות לתרגילים על הלמה הלוקלית

צביעת קשתות בגרפים

נגריל לכל קשת בגרף צבע מ־$\{1, \ldots, c\}$ באופן יוניפורמי וב"ת, ונוכיח שבהסתברות חיובית אין מעגל מונוכרומטי. לכל מעגל C בגרף נבחר באופן שרירותי שלוש קשתות עוקבות בו, ונסמן ב־A_C את המאורע ששלושת הקשתות לא צבועות בשלושה צבעים שונים. בנוסף לכך, אם לשני מעגלים C_1, C_2 בחרנו את אותן שלוש קשתות, אז נרשום את המאורע המתאים רק פעם אחת (נניח שרק ל־C_1, ואז נתעלם מ־C_2). מספיק להראות עתה שבהסתברות חיובית אף אחד מהמאורעות A_C לא יקרה.

לכל C מתקיים $\Pr[A_C] \leq 3c^{-1}$. בנוסף לכך, כל A_C הוא ב"ת בכל המאורעות אשר נרשמו עבור קשתות הזרות לקשתות שנבחרו מ־C. על כן A_C הוא ב"ת בכל המאורעות האחרים פרט ללא יותר מ־$9d^2$ מהם (יש 9 חפיפות־קשת אפשריות בין שני מסלולים מאורך 3, ומכיוון ש־d היא הדרגה המקסימלית יש לא יותר מעוד d^2 אפשרויות לבחור "קשתות המשך" למסלול החופף). בחירת של $c = 100d^2$ (למשל) תבטיח עתה שיתקיים $e \cdot 3c^{-1}(9d^2) < 1$, כך שנוכל להשתמש במקרה הסימטרי של הלמה הלוקלית ולסיים את ההוכחה.

קיום תת גרף ספציפי בגרף צפוף

ניתן להוכיח את המבוקש עם $c = 20$, ואת זאת נעשה עתה. אנו נגריל פונקציה f מ־$V(H)$, קבוצת הצמתים של H, לתוך $V(G)$, ע"י כך שלכל צומת u של H נבחר את $f(u)$ באופן מקרי וב"ת מ־$V(G)$ (בשביל ששאר הטיעון יעבוד, אי אפשר עדיין לבחור את f "בלי חזרות"). לכל קשת u, v של H נגדיר את המאורע E_{uv} בתור המאורע ש־$f(u), f(v)$ אינה קשת ב־G.

נשים לב עתה שמתקיים $\Pr[E_{uv}] < \frac{1}{10d}$, וכן שמאורע זה ב"ת בכל המאורעים האחרים (ז"א באלגברה הנוצרת על ידם) פרט לאלו הקשורים בקשתות של H המכילות את u או v. מהסוג האחרון יש פחות מ־$2d$ מאורעות, ולכן ניתן להפעיל את המקרה הסימטרי של הלמה הלוקלית ולקבל שבהסתברות חיובית אף מאורע לא קורה. אבל להמשך הטיעון צריך גם להשתמש בחסם (הקטן) שהלמה נותנת על ההסתברות, שהוא $(1 - \frac{1}{2d})^{md/2} > 2^{-m}$.

לסיכום, נחסום עתה את ההסתברות למאורע ש־f אינה חד־חד ערכית. לפי איחוד מאורעות (עם הנתון על n) זה חסום ע"י $\binom{m}{2}/n < 2^{-m}$. מכאן שבהסתברות חיובית גם f חד־חד ערכית וגם כל הקשתות של H עוברות לקשתות של G, ז"א שב־G חייב להיות עותק של H כתת־גרף.

שיפור קל של החסם על משפט רמזי

על מנת להראות את תוצאת השאלה, צריך להראות בעצם שלכל $C < \sqrt{2}/e$ ולכל k גדול דיו (כפונקציה של ההפרש בין C ו־$\sqrt{2}/e$), קיים גרף בעל $Ck2^{k/2}$ צמתים ושאיו בו קליק או קבוצה ב"ת בת k צמתים.

נסתכל על הגרף $G(n, \frac{1}{2})$ עבור $n = Ck2^{k/2}$, ולכל קבוצת U בת k צמתים נגדיר את המאורע A_U שקבוצה זו מהווה קליק או קבוצה ב"ת. הסיכוי למאורע זה הוא $2^{1-\binom{k}{2}}$. כמו כן, כל מאורע A_U אינו תלוי בקבוצת כל המאורעות האחרים הנ"ל פרט ללא יותר מ־$\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} - 1$ מתוכם (כי $\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$ הוא חסם על מספר הקבוצות מגודל k אשר חותכות את U ב־2 מקומות לפחות, ול־$k > 2$ המספר האמיתי קטן ממש מהחסם). אנו נרצה להשתמש בגרסה הסימטרית של הלמה הלוקלית על מנת להוכיח שבסיכוי חיובי אף אחד מהמאורעות הנ"ל אינו קורה, ולשם כך עלינו להוכיח שמתקיים $e2^{1-\binom{k}{2}}\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} < 1$. שימוש בחסמים הידועים על בינומים ישלים את ההוכחה (שימו לב שהשוויון האחרון נכון רק תחת ההנחות על C):

$$\begin{aligned} e2^{1-\binom{k}{2}}\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} &< e2^{1+k/2-k^2/2} \cdot \frac{k^2-k}{2} \cdot (\frac{en}{k-2})^{k-2} \\ &= e2^{1+k/2-k^2/2} \cdot \frac{k^2-k}{2} \cdot (\frac{eCk}{k-2}2^{k/2})^{k-2} \\ &= (k^2-k)e^{k-1}2^{-k/2}C^{k-2}(1+\frac{2}{k-2})^{k-2} \\ &= O(k^2(\frac{eC}{\sqrt{2}})^k) = o(1) \end{aligned}$$

ז"א שעבור k גדול דיו המכפלה הנ"ל אכן קטנה מ־1.

צביעות חסכוניות

נבצע צביעה אקראית של הגרף G ב־k צבעים (אחר כך נקבע את ערך k, אבל כבר נניח שהוא לפחות 3), ונגדיר את המאורעות ה"רעים" על מנת להשתמש בלמה הלוקלית. ישנם שני סוגים של מאורעות כאלו.

- לכל קשת $uv \in E$ נגדיר את המאורע A_{uv} שהיא מונוכרומטית. מתקיים $\Pr[A_{uv}] = \frac{1}{k}$.
- לכל שלושה צמתים u, v, w שיש עבורם שכן משותף, נגדיר את המאורע B_{uvw} שלשלושתם אותו צבע. מתקיים כי $\Pr[B_{uvw}] = \frac{1}{k^2}$.

אנו נראה את קיום תנאי הלמה הלוקלית בגרסא הלא־סימטרית ה"נוחה לשימוש" שבחוברת התרגול. ההסתברות של כל המאורעות קטנה מ־$\frac{1}{2}$ עבור $k \geq 3$, ועתה נבדוק לכל סוג מאורע את קיום התנאי השני.

מאורע A_{uv} מהסוג הראשון יהיה בפרט בלתי תלוי באלגברה הנוצרת ע"י כל המאורעות המתייחסים אך ורק לצבעים של הצמתים $V \setminus \{u\}$. יש לכל היותר $\Delta - 1$ מאורעות מהסוג הראשון שמתיחסים ל־u (לא כולל A_{uv} עצמו) ו־$\Delta\binom{\Delta-1}{2}$ מאורעות מהסוג השני שמתיחסים ל־u. לכן צריך להתקיים $\frac{\Delta-1}{k} + \frac{\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)}{2k^2} \leq \frac{1}{4}$, וזה מתקיים בפרט לכל בחירה $k \geq \max\{2\Delta^{3/2}, 128\}$.

מאורע B_{uvw} מהסוג השני יהיה בלתי תלוי באלגברה הנוצרת ע"י כל המאורעות שאינם מתיחסים ל־u או v. יש לכל היותר 2Δ מאורעות מהסוג הראשון שמתיחסים ל־u או v, ולכל היותר $2\Delta\binom{\Delta-1}{2}$ מאורעות מהסוג השני (יש קצת ספירה כפולה). לכן צריך להתקיים $\frac{2\Delta}{k} + \frac{\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)}{k^2} \leq \frac{1}{4}$, וזה יתקיים עבור $k \geq \max\{8\Delta^{3/2}, 64\}$.

סה"כ, על מנת שהלמה הלוקלית תתן לנו סיכוי חיובי שאף אחד מהמאורעות המוגדרים לא יתקיים (ואז הצביעה היא כנדרש) ניתן למשל להציב $k = \max\{8\Delta^{3/2}, 128\} = \Theta(\Delta^{3/2})$.

מילים לא חזרתיות

נקבע ערך $n \in \mathbb{N}$ כל שהוא, ונסמן ב־$A_{i,m}$ את המאורע שתת המחרוזת $w_i, w_{i+1}, \ldots w_{i+2m-1}$ היא חזרה. בבירור מתקיים $\Pr[A_{i,m}] = k^{-m}$. כמו כן, המאורע $A_{i,m}$ בהכרח בלתי תלוי בכל המאורעות $A_{j,p}$ עבורם $\{i, i+1, \ldots, i+2m-1\} \cap \{j, j+1, \ldots, j+2p-1\} = \emptyset$. מספר הקטעים מאורך $2l$ שנחתכים עם הקטע שמתאים ל־$A_{i,m}$ הוא לכל היותר $2m + 2l$. נסמן ב־$N_{i,m}$ את קבוצת האינדכסים שעבורם הקטעים המתאימים נחתכים עם $\{i, i+1, \ldots, i+2m-1\}$. אנו נשתמש בגרסה הכללית ביותר של הלמה הלוקלית. נקבע את $x_{i,m} = \frac{1}{6^m+1}$, ונראה שאכן תנאי הלמה מתקיימים עבור k גדול מספיק:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6^m+1} \prod_{(j,p)\in N_{i,m}} \left(1 - \frac{1}{6^p+1}\right) &\geq \frac{1}{6^m+1} \prod_{l=1}^{n/2} \left(1 - \frac{1}{6^l+1}\right)^{2m+2l} \\
&\geq \frac{1}{6^m+1} \prod_{l=1}^{n/2} \exp\left(-\frac{2m+2l}{6^l+1}\right) \\
&= \frac{1}{6^m+1} \exp\left(-\sum_{l=1}^{n/2} \frac{2m+2l}{6^l+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{6^m+1} \exp\left(-2m\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{6^l+1} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l}{6^l+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{6^m+1} \exp\left(-4m-5\right) \geq \exp\left(-12m\right)
\end{aligned}$$

לכן אם $k \geq \lceil e^{12} \rceil$ נקבל לכל i, m כי

$$x_{i,m} \prod_{(j,p)\in N_{i,m}} (1 - x_{j,p}) = \frac{1}{6^m + 1} \prod_{A_{j,p}\in N_{i,m}} \left(1 - \frac{1}{6^p + 1}\right) \geq k^{-m} = \Pr[A_{i,m}]$$

כנדרש (חישובים זהירים יותר יניבו חסם סביר יותר על k).

חלוקה בנטל

גם שאלה זו דורשת שימוש בניסוח הכללי ביותר של הלמה הלוקלית. לכל צומת $v \in V$ נגריל באופן מקרי, יוניפורמי וב"ת האם הוא ב־V_1 או ב־V_2. לכל v מדרגת יציאה $d(v) > C_k$ (אח"כ נקבע את C_k), נסמן ב־B_v את המאורע שהדרגה שלו בתת הגרף המתאים אינה בין $\frac{1}{3}d(v)$ לבין $\frac{2}{3}d(v)$. ל־v מדרגה שאינה עולה על C_k פשוט נגדיר את B_v כמאורע בסיכוי 0. לפי חסמי סטיות גדולות, קיים $\alpha > 0$ כך ש־$\Pr[B_v] < 2^{1-\alpha d(v)}$ לכל v.

עתה לכל v נגדיר את המספר $x_v = 1 - 2^{-\alpha/k}$, ואחרי זה נקבע את C_k להיות גדול דיו על מנת שיתקיים $2^{\alpha C_k/k} \geq 2/(1 - 2^{-\alpha/k})$. נסמן ב־$D_v$ את קבוצת המאורעות $\{B_w : \exists u(vu, wu \in E)\}$, ז"א את כל המאורעות הקשורים בצמתים שיש להם צומת יציאה משותף עם v. נשים לב ש־B_v הוא ב"ת לחלוטין במאורעות שאינם ברשימה D_v, וכן נשים לב שמתקיים $|D_v| \leq (k-1) \cdot d(v)$ לפי הנתון על כך שכל דרגות הכניסה חסומות ע"י k.

על כן אם $d(v) \geq C_k$ אז $\prod_{w\in D_v}(1 - x_w) \geq 2^{-\alpha(k-1)d(v)/k} \geq 2^{\alpha C_k/k} 2^{-\alpha d(v)} \geq 2^{1-\alpha d(v)}/(1 - 2^{-\alpha/k})$, ואז ניתן לוודא שמתקיים $\Pr[B_v] < 2^{1-\alpha d(v)} \leq x_v \prod_{w\in D_v}(1 - x_w)$, ז"א שאפשר להפעיל את הלמה הלוקלית ולראות שקיימת חלוקה עבורה אף מאורע B_v אינו מתקיים, כנדרש.

קורלציות

שוויון אצל קלייטמן

מצאו דוגמא (מעל S מתאים) שבה $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ הן משפחות מונוטוניות עולות, שתיהן אינן ריקות ואינן שוות ל־$\mathcal{P}(S)$, ומתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| = 2^{|S|}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$.

אי שוויון אצל קלייטמן

נתון ש־$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ הן משפחות מונוטוניות עולות לא ריקות, וכן ששתיהן כוללות אך ורק תתי קבוצות של S מגודל גדול מ־$\frac{1}{2}|S|$. הראו שבהכרח מתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| < 2^{|S|}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$.

חיתוך של מאורעות

א. הראו שאם $A_1, \ldots, A_k$ סידרה של תכונות מונוטוניות עולות של גרפים בעלי קבוצת הצמתים V (ז"א שאם $G(V, E)$ מקיים את A_i ו־$E \subset E'$ אז $G(V, E')$ גם מקיים את A_i), אז עבור גרף מקרי $G = G(n, p)$ מתקיים אי השוויון $\Pr[G \models A_1, \ldots, G \models A_n] \geq \prod_{i=1}^{k} \Pr[G \models A_i]$ (הסימון $G \models A$ פירושו לצורך הענין הוא ש־G מקיים את התכונה A).

ב. הוכיחו או הפריכו עבור $G(n, \frac{1}{2})$: (i) בהסתברות לפחות $1 - 2^{-\Omega(n^3)}$ הגרף G מכיל משולש. (ii) כאשר n הוא אי זוגי, בהסתברות לפחות 2^{-n} הדרגה המינימלית של הגרף היא לפחות $\frac{n-1}{2}$.

פונקציות מונוטוניות

תהי $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ פונקציה מונוטונית לא יורדת (אם $x, y \in \{0,1\}^n$ שני וקטורים המקיימים את אי השוויונות $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$ אז מתקיים $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(y_1, \ldots, y_n)$). הראו שהפונקציה המונוטונית לא עולה הקרובה ביותר ל־f במרחק Hamming היא פונקציה קבועה (ליתר דיוק שאחת מהפונקציות הנ"ל היא פונקציה קבועה, יש מקרים בהם זו אינה הפונקציה היחידה).

משפט קלייטמן לרב־קבוצות

יהיו $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ משפחות של רב־קבוצות מעל קבוצה S, כאשר כל איבר מ S יכול להופיע לכל היותר r פעמים באיברים של $\mathcal{A}$ או $\mathcal{B}$. נניח גם כי משפחות אלה מונוטוניות עולות, כאשר הכלה כוללת גם שמספר המופעים של איבר בקבוצה המכילה גדול או שווה לזה בקבוצה המוכלת. הראו שבמקרה זה $|\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}| \leq (r+1)^{|S|}\,|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$.

פתרונות לתרגילים על קורלציות

שוויון אצל קלייטמן

נבחר $S = \{1, \ldots, k\}$ עבור $k \geq 2$ כל שהוא. נבחר את $\mathcal{A}$ להיות המשפחה $\{A \subseteq S : 1 \in A\}$ ואת $\mathcal{B}$ להיות $\{A \subseteq S : 2 \in A\}$. חישוב ישיר מראה עתה שמתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| = 2^{2k-2} = 2^{|S|}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$.

אי שוויון אצל קלייטמן

כזכור, בהוכחה של אי שוויון קלייטמן משתמשים במשפט ארבעת הפונקציות על מנת להראות שהמשפחות המונוטוניות מקיימות את אי השוויון $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}||\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}|$. כמו בהוכחה המקורית מתקיים עבור שתי המשפחות המונוטוניות העולות $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, כאשר ידוע לנו גם שהחיתוך לא ריק (הוא כולל את S, כי המשפחות המקוריות לא היו ריקות ולכן כללו את S).

עבור $\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}$ ידוע לנו שהיא אינה מכילה את הקבוצה הריקה, מכיוון ש־$\mathcal{A}$ וגם $\mathcal{B}$ מכילות אך ורק קבוצות מגודל גדול מ־$\frac{1}{2}|S|$, וחיתוך של כל שתי קבוצות כאלו אינו ריק. על כן $|\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}||\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}| < 2^{|S|}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$, ובזאת סיימנו את ההוכחה.

חיתוך של מאורעות

א. מראים זאת באינדוקציה על k. עבור $k = 1$ המשפט טריויאלי. כמו כן נשים לב שאם $A_1, \ldots, A_k$ הן תכונות מונוטוניות לא יורדות, אז גם $\bigwedge_{i=1}^{k} A_i$ היא תכונה כזו. לכן מתקיים עבור $k > 1$ (ע"י שימוש כפי שנעשה בכיתה במשפט FKG ולאחריו שימוש בהנחת האינדוקציה)

$$\begin{aligned}
\Pr\left[G \vDash \bigwedge_{i=1}^{k} A_i\right] &= \Pr\left[G \vDash \left(\bigwedge_{i=1}^{k-1} A_i\right) \wedge A_k\right] \\
&\geq \Pr\left[G \vDash \left(\bigwedge_{i=1}^{k-1} A_i\right)\right] \cdot \Pr\left[G \vDash A_k\right] \\
&\geq \left(\prod_{i=1}^{k-1} \Pr\left[G \vDash A_i\right]\right) \cdot \Pr\left[G \vDash A_k\right] = \prod_{i=1}^{k} \Pr\left[G \vDash A_i\right]
\end{aligned}$$

כנדרש.

ב. (i) עבור $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$ מתקבל בהסתברות $2^{-\binom{n}{2}}$ הגרף הריק, שבפרט אינו מכיל משולש, ולכן ההסתברות שהגרף לא מכיל משולש היא לפחות $2^{-\Theta\left(n^2\right)}>2^{-\Omega\left(n^3\right)}$.

ב. (ii) נוכיח זאת על ידי שימוש בסעיף א. נגדיר עבור $i\in[n]$ את E_i להיות המאורע שדרגת הצומת i בגרף היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. לכל i מתקיים $\Pr\left[E_i\right]\geq\frac{1}{2}$, וכל המאורעות הנ"ל מתייחסים לקיום תכונות מונוטוניות לא יורדות של הגרף, כך שמתקיימים התנאים הדרושים לשימוש בסעיף א.

פונקציות מונוטוניות

נסמן ב־$\mathcal{F}_0=\{x\in\{0,1\}^n:f\left(x\right)=0\}$ את קבוצת האיברים שעליהם f מקבלת את הערך 0, ונסמן ב־$\mathcal{F}_1=\{0,1\}^n\backslash\mathcal{F}_0$ את האיברים עליהם f היא 1. אם מזהים כל איבר $x\in\{0,1\}^n$ עם קבוצת האחדות שלו $S_x=\{i:x_i=1\}\subseteq[n]$, אז קל לוודא ש־$\mathcal{F}_0$ היא משפחה מונוטונית לא עולה של תת קבוצות של $[n]$, וש־$\mathcal{F}_1$ היא משפחה מונוטונית לא יורדת. נניח עתה ש־$g:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ היא פונקציה מונוטונית לא עולה, ונסמן בדומה את המשפחות $\mathcal{G}_0$ (שהיא מונוטונית לא יורדת) ו־$\mathcal{G}_1$ (שהיא מונוטונית לא עולה).

המרחק של f מהפונקציה הקבועה הקרובה ביותר הוא $\min\left\{\left|\mathcal{F}_0\right|,\left|\mathcal{F}_1\right|\right\}$ שכן $\left|\mathcal{F}_0\right|$ הוא המרחק של f מהפונקציה הקבועה 1 ו־$\left|\mathcal{F}_1\right|$ הוא המרחק מהפונקציה הקבועה 0. כמו כן, המרחק מ־f ל־g הוא $\left|\mathcal{F}_1\cap\mathcal{G}_0\right|+\left|\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_1\right|$. לכן על מנת להוכיח את טענת השאלה עלינו להוכיח שלכל g מונוטונית לא עולה מתקיים האי שוויון הבא: $\left|\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_1\right|+\left|\mathcal{F}_1\cap\mathcal{G}_0\right|\geq\min\left\{\left|\mathcal{F}_0\right|,\left|\mathcal{F}_1\right|\right\}$.

לפי המשפט של קלייטמן מתקיים $2^n\left|\mathcal{F}_1\cap\mathcal{G}_0\right|\geq\left|\mathcal{F}_1\right|\cdot\left|\mathcal{G}_0\right|$ ו־$2^n\left|\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_1\right|\geq\left|\mathcal{F}_0\right|\cdot\left|\mathcal{G}_1\right|$, ולכן:

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_1\right|+\left|\mathcal{F}_1\cap\mathcal{G}_0\right| &\geq 2^{-n}\left(\left|\mathcal{F}_1\right|\cdot\left|\mathcal{G}_0\right|+\left|\mathcal{F}_0\right|\cdot\left|\mathcal{G}_1\right|\right)\\ &= 2^{-n}\left(\left|\mathcal{F}_1\right|\cdot\left(2^n-\left|\mathcal{G}_1\right|\right)+\left|\mathcal{F}_0\right|\cdot\left|\mathcal{G}_1\right|\right)\\ &= \left(2^{-n}\left|\mathcal{G}_1\right|\right)\cdot\left|\mathcal{F}_0\right|+\left(1-2^{-n}\left|\mathcal{G}_1\right|\right)\cdot\left|\mathcal{F}_1\right|\\ &\geq \left(2^{-n}\left|\mathcal{G}_1\right|\right)\cdot\min\left\{\left|\mathcal{F}_0\right|,\left|\mathcal{F}_1\right|\right\}+\left(1-2^{-n}\left|\mathcal{G}_1\right|\right)\cdot\min\left\{\left|\mathcal{F}_0\right|,\left|\mathcal{F}_1\right|\right\}\\ &= \min\left\{\left|\mathcal{F}_0\right|,\left|\mathcal{F}_1\right|\right\}\end{aligned}$$

נשים לב שכאמור אכן יש מקרים שקיימת פונקציה מונוטונית לא עולה קרובה ביותר שאינה קבועה. נביט לדוגמא על המקרה $n=2$ ועל הפונקציה המונוטונית לא יורדת $f\left(0,0\right)=f\left(1,0\right)=0,f\left(0,1\right)=f\left(1,1\right)=1$. מכוון שהפונקציה הקבועה הקרובה ביותר היא הפונקציה הזהותית 1 או הזהותית 0, המרחק מהפונקציה המונוטונית לא עולה הקרובה ביותר הוא 2. עם זאת, ניתן להשיג אותו גם עם הפונקציה הלא־קבועה המוגדרת באופן הבא: $g\left(0,0\right)=g\left(0,1\right)=1,g\left(1,0\right)=g\left(1,1\right)=0$.

משפט קלייטמן לרב־קבוצות

נוכיח זאת בעזרת משפט FKG עבור הקבוצה $S'=S\times\{1,\ldots,r\}$. בהנתן רב־קבוצה C מעל S עם r עותקים לכל היותר מכל איבר, נאמר ש־$C'\subseteq S'$ מייצגת את C אם היא מורכבת בדיוק מכל האיברים מהצורה (a,i) כאשר a מופיע ב־C i פעמים או יותר. מיפוי זה הוא חד חד ערכי ומשמר הכלה. נגדיר פונקציה $\delta:\mathcal{P}\left(S'\right)\to\mathbb{R}^+$ שמציינת את תתי הקבוצות ב־S' שמייצגות רב־קבוצות מעל S (כלומר $\delta\left(C'\right)=1$ אם C' מייצגת רב־קבוצה C

כלשהי, ואחרת $\delta(C')=0$). אם שתי קבוצות A,B מייצגות רב־קבוצות, אז כך גם $A\cap B$ ו־$A\cup B$, ולכן δ היא לוג־סופר־מודולרית.

נגדיר את f המציינת קבוצות C המכילות קבוצה D המייצגת רב־קבוצה מ־$\mathcal{A}$ ובאותו אופן נגדיר את g עבור $\mathcal{B}$. כיוון ששתי הקבוצות מונוטוניות עולות והמעבר לקבוצה מייצגת משמר הכלה, אז אם $f(C)=1$ ו־C מייצגת איזה רב־קבוצה, אז אכן רב־קבוצה זו חברה ב־$\mathcal{A}$, ובאותו אופן עבור g ו־$\mathcal{B}$.

כעת נציב באי שוויון FKG:

$$\left(\sum_{C\subseteq S'} f(C)\,\delta(C)\right)\left(\sum_{C\subseteq S'} g(C)\,\delta(C)\right) \;\le\; \left(\sum_{C\subseteq S'} f(C)\,g(C)\,\delta(C)\right)\left(\sum_{C\subseteq S'} \delta(C)\right)$$

כעת, נשים לב ש $\delta(C)\cdot f(C)=1$ אם ורק אם C מייצגת רב־קבוצה מ־$\mathcal{A}$, ובאופן דומה עבור g ו־$\mathcal{B}$, ועבור $f\cdot g$ ו־$\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. לסיכום, לפי מספרן האפשרי של רב־קבוצות מעל S ידוע לנו כי $\sum_{C\subseteq S'}\delta(C)=(r+1)^{|S|}$, ובכך מסתיימת ההוכחה.

אנטרופיה

הטלות נחתכות

תהא $\mathcal{F}$ משפחה של וקטורים ב־$S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ ויהי $\mathcal{G}=\{G_1,G_2,\ldots,G_m\}$ אוסף של תת קבוצות של $[n]$ כך שכל איבר $i\in[n]$ מופיע בלפחות k קבוצות ב־$\mathcal{G}$. עבור $1\le i\le m$ נסמן ב־$\mathcal{F}_i$ את הקבוצה הנוצרת על ידי הטלת כל איברי $\mathcal{F}$ על הקואורדינטות ב־G_i. הוכיחו שאז מתקיים $|\mathcal{F}|^k\le\prod_{i=1}^m|\mathcal{F}_i|$.

שימוש באי שוויון פינסקר

אי שוויון Pinsker קובע את הדבר הבא: עבור שני מרחבי הסתברות μ ו־ν מעל אותה קבוצת בסיס בדידה S, מתקיים $d(\mu,\nu)\le\sqrt{\frac{1}{2}D(\mu\|\nu)}$, כאשר d מסמן את המרחק בין ההתפלגויות (ראו את התרגילים הראשונים בחוברת התרגילים) ו־D מסמן את מרחק האנטרופיה היחסית.

נתון ש־X ו־Y הם שני משתנים מקריים מעל מרחב הסתברות בדיד, שמקבלים את כל ערכיהם בטווח הממשיים $[0,1]$. השתמשו באי השוויון למעלה על מנת להראות שמתקיים $|\mathrm{Cov}[X,Y]|\le\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{I}[X,Y]}$.

לא תרבו

נתונה קבוצת מילים $C\subseteq\{0,1\}^n$. עבור $\alpha>0$ קבוע, נתון שלכל קבוצת אינדכסים $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ המקיימת $|I|\le\alpha n$ קיימת מילה $w=w_1,\ldots,w_n\in C$ המתאפסת על כל האינדכסים ב־I, ז"א $w_i=0$ לכל $i\in I$. כמו כן, נתון שקיים מרחב הסתברות μ מעל $\{1,\ldots,n\}$, כך שאם i הוא אינדכס הנבחר לפי מרחב הסתברות זה, אז לכל $w=w_1,\ldots,w_n\in C$ מתקיים $\Pr_{i\sim\mu}[w_i=1]\ge\frac{9}{10}$. הראו שקיים $\beta>0$ התלוי ב־α בלבד, שעבורו מתקיים $|C|\le 2^{(1-\beta)n}$.

משפחות נחתכות במשולשים

תהא $\mathcal{F}$ משפחת גרפים על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,t\}$ כך שלכל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ ישנו משולש המופיע בשניהם. הוכיחו שאז מתקיים $|\mathcal{F}| < \frac{1}{4}2^{\binom{t}{2}}$.

משפחות נחתכות בשידוכים

תהא $\mathcal{F}$ משפחת גרפים על הצמתים $\{1,2,\ldots,2n\}$ כך שלכל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ ישנו שידוך מושלם המופיע בשניהם. הראו כי $|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{2n}{2}-n}$.

פתרונות לתרגילים על אנטרופיה

הטלות נחתכות

נסמן ב־$X = (X_1,\ldots,X_n)$ משתנה מקרי המקבל ערך מ־$\mathcal{F}$ בהתפלגות אחידה. נסמן ב־$X(G_i)$ את הטלת X על הקואורדינטות ב־G_i. לפי אי שוויון Shearer שנלמד בתרגול ידוע כי $k\mathrm{H}[X] \leq \sum_{i=1}^{m}\mathrm{H}[X(G_i)]$. מכוון ש־$X$ נבחר בהתפלגות אחידה אז $\mathrm{H}[X] = \log|\mathcal{F}|$, ומכוון ש־$X[G_i]$ הוא בחירה בתוך $\mathcal{F}_i$ אז $\mathrm{H}[X(G_i)] \leq \log|\mathcal{F}_i|$. כך מקבלים $k\log|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^{m}\log|\mathcal{F}_i|$, ובלקיחת 2 בחזקת שני צידי אי השוויון מקבלים את הטענה המבוקשת.

שימוש באי שוויון פינסקר

נניח שיש לנו שני משתנים מקריים X ו־Y, ונגדיר שני מרחבי הסתברות על הערכים שלהם, כפי שהוגדרו עבור הניתוח של $\mathrm{I}[X,Y]$. המרחב μ יוגדר לפי $\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] = \Pr[X=\alpha \wedge Y=\beta]$, והמרחב ν יוגדר לפי $\Pr_\nu[(\alpha,\beta)] = \Pr[X=\alpha]\Pr[Y=\beta]$. עתה נפתח, כאשר הסכומים הם על α ו־β שיש להם סיכוי חיובי להתקבל כערך המ"מ המתאימים:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X,Y] = {} & \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \\
= {} & \sum_{\alpha,\beta}\alpha\beta\Pr[X=\alpha\wedge Y=\beta] - (\sum_{\alpha}\alpha\Pr[X=\alpha])(\sum_{\beta}\beta\Pr[X=\beta]) \\
= {} & \sum_{\alpha,\beta}\alpha\beta(\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]) \\
= {} & \sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)]>\Pr_\nu[(\alpha,\beta)]}\alpha\beta(\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]) - \sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)]<\Pr_\nu[(\alpha,\beta)]}\alpha\beta(\Pr_\nu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\mu[(\alpha,\beta)])
\end{aligned}$$

בסוף יצא לנו הפרש של שני סכומים, כ"א מהם של איברים חיוביים. עכשיו משתמשים בנתון שערכי המ"מ הם בין 0 ל־1, ואז המחוסר חסום ע"י $\sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)]>\Pr_\nu[(\alpha,\beta)]}(\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]) \leq d(\mu,\nu)$, והמחסר גם חסום ע"י $\sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)]<\Pr_\nu[(\alpha,\beta)]}(\Pr_\nu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\mu[(\alpha,\beta)]) \leq d(\mu,\nu)$. על כן $|\mathrm{Cov}[X,Y]| \leq d(\mu,\nu)$. מכאן ההמשך נובע מאי־שוויון פינסקר ומהקשר בין המידע המשותף לבין מרחק האנטרופיה היחסית המתאים:

$$|\mathrm{Cov}[X,Y]| \leq d(\mu,\nu) \leq \sqrt{\frac{1}{2}D(\mu\|\nu)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{I}[X,Y]}$$

לא תרבו

ראשית, נסמן ב־$B = \{i : \Pr_\mu[i] \geq 1/\alpha n\}$ את קבוצת האינדקסים המתקבלים בהסתברות גבוהה מ־$1/\alpha n$. נשים לב קודם כל שמתקיים $|B| \leq \alpha n$, פשוט כי סכום ההסתברויות לא יכול להיות גדול מ־1. על כן לפי נתוני השאלה יש מילה $w \in C$ שמתאפסת על B. מכאן שבפרט $\Pr_{i\sim\mu}[i \in B] \leq \frac{1}{10}$, כי אחרת לא יכול להיות שיתקיים $\Pr_\mu[w_i = 1] \geq \frac{9}{10}$ כפי שנתון.

עתה נסתכל על התהליך הבא: גם מגרילים את $w \in C$ באופן יוניפורמי מהקבוצה הנ"ל, וגם באופן ב"ת מגרילים את i לפי μ. נשים לב שמתקיים $\mathrm{H}[w] = \log|C|$ לפי הידוע על אנטרופיה של התפלגות יוניפורמית, וכן עדיין מתקיים $\Pr[w_i = 1] \geq \frac{9}{10}$. אי השוויון השני נכון ל־w המוגרל אקראית ע"י "מיצוע" של אי השוויון הנתון לכל $w \in C$ קבוע. על מנת לסיים נרצה לחסום את $\mathrm{H}[w]$ ודרכו את $|C|$.

נסמן עתה את קבוצת האינדכסים $J = \{j : \Pr_{w\sim\nu}[w_j = 1] \geq \frac{7}{10}\}$ שעבורם ההגרלה של w תתן ערך 1 בהסתברות לפחות $\frac{7}{10}$ (ν הוא המרחב של הגרלה יוניפורמית של $w \in C$). מתקיים $\Pr_{i\sim\mu}[i \in J] \geq \frac{2}{10}$, כי המאורע "$w_i = 1$" במרחב המשולב של ההגרלות מוכל באיחוד המאורע "$i \in J$" עם המאורע שמתקיים $w_i = 1$ כאשר i אינו ב־J (ולמאורע האחרון ההסתברות בוודאי חסומה ע"י $\frac{7}{10}$).

בפרט, ע"פ הכלל על איחוד מאורעות, חייב להתקיים $\Pr_{i\sim\mu}[i \in J \setminus B] \geq \frac{1}{10}$. מכיוון שבקבוצה הנ"ל אין איברים עם הסתברות גבוהה מ־$1/\alpha n$ (לפי הגדרת B), מתקיים $|J| \geq |J \setminus B| \geq \alpha n/10$. לפי סאב־אדיטיביות של אנטרופיה אנחנו יודעים שמתקיים $\mathrm{H}[w] = \mathrm{H}[w_1, \ldots, w_n] \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{H}[w_i]$. לבסוף, נשים לב שעבור כל i מתקיים $\mathrm{H}[w_i] \leq 1$, בעוד שעבור $i \in J$ מתקיים $\mathrm{H}[w_i] \leq H(\frac{7}{10}) < 1$ (הביטוי באמצע הוא פונקצית האנטרופיה המספרית שהוגדרה בשיעור). על כן נסמן $\beta = \frac{\alpha}{10}(1 - H(\frac{7}{10})) > 0$, ונקבל $\log|C| = \mathrm{H}[w] \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{H}[w_i] \leq (1-\beta)n$. העברת שני האגפים לחזקה של 2 תשלים את ההוכחה.

משפחות נחתכות במשולשים

ראשית נתאים את אי השוויון מהתרגיל "הטלות נחתכות" לצרכינו. נקבע כי $S_i = \{0, 1\}$ כולן, ואז ניתן לזהות את הוקטורים ב־$\mathcal{F}$ עם תתי קבוצות של $[n]$. כעת מקבלים שאם $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_m\}$ אוסף של תתי קבוצות של $[n]$ כך שכל איבר ב־$[n]$ מופיע בלפחות k קבוצות ב $\mathcal{G}$, ואם נסמן $\mathcal{F}_i = \{F \cap G_i : F \in \mathcal{F}\}$, אז מתקיים $|\mathcal{F}|^k \leq \prod_{i=1}^m |\mathcal{F}_i|$.

כעת נוכל להוכיח את הטענה. נסמן ב־N את קבוצת כל $\binom{t}{2}$ הזוגות הלא־סדורים של איברים ב־$[t]$, ונביט ב־$\mathcal{F}$ כמשפחה של תתי קבוצות של N. תהא $\mathcal{G}$ משפחת כל תתי הקבוצות של N שהן קבוצת קשתות של איחוד זר של שני גרפים מלאים, אחד על $\lceil t/2 \rceil$ צמתים והשני על $\lfloor t/2 \rfloor$ צמתים. נסמן ב־ $s = \binom{\lceil t/2 \rceil}{2} + \binom{\lfloor t/2 \rfloor}{2}$ את מספר הקשתות בגרף כזה. נסמן גם $m = |\mathcal{G}|$. משיקולי סימטריה, כל קשת ב־N נמצאת בבדיוק $k = sm/\binom{t}{2}$ גרפים מ־$\mathcal{G}$.

כעת, נשים לב שלכל $G \in \mathcal{G}$ מתקיים שהגרף המשלים לו הוא חסר משולשים, ולכן מכיוון שכל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ נחתכים במשולש, הם גם חייבים לחלוק קשת עם G, וטיעון זה יפה לכל $G \in \mathcal{G}$. כך, אם נחזור לסימונים של תחילת ההוכחה, הגודל של כל $\mathcal{F}_i$ הוא לכל היותר 2^{s-1}, שכן מכיוון שלכל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ יש לפחות קשת אחת משותפת שנמצאת גם ב־G_i, יכולים להיות לכל היותר 2^{s-1} גרפים ב־$\mathcal{F}$ הנבדלים על קשתות G_i (שכן לא יכולה להיות ב־$\mathcal{F}_i$ קבוצה ומשלימתה, שהרי כאלה קבוצות היו מתאימות לשני גרפים ב־$\mathcal{F}$ שאינם נחתכים על G_i כלל). נציב זאת באי השוויון מההתחלה ונקבל $|\mathcal{F}|^{sm/\binom{t}{2}} \leq \left(2^{s-1}\right)^m$, ובלקיחת שורשים משני הצדדים $|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{t}{2} - \binom{t}{2}/s}$. לפי משולש פסקל $s < \frac{1}{2}\binom{t}{2}$ וכך $|\mathcal{F}| < 2^{\binom{t}{2}-2} = \frac{1}{4}2^{\binom{t}{2}}$.

משפחות נחתכות בשידוכים

נעקוב אחרי פתרון התרגיל "משפחות נחתכות במשולשים". נסמן ב־N את קבוצת כל $\binom{2n}{2}$ הזוגות הלא סדורים של איברים ב־$\{1,2,\ldots,2n\}$. נביט ב־$\mathcal{F}$ כמשפחה של תתי קבוצות של N. תהא $\mathcal{G}$ משפחת כל תתי הקבוצות של N המתאימות לכוכבים (פורשים) על $2n$ צמתים. מספר הקשתות בגרף כזה הוא $s=2n-1$, ונסמן גם $|\mathcal{G}|=m$. שוב, משיקולי סימטריה כל קשת ב־N נמצאת בבדיוק $sm/\binom{2n}{2}$ גרפים ב־$\mathcal{G}$.

נשים לב שלכל $G\in\mathcal{G}$ מתקיים שהשידוך המקסימלי במשלים שלו הוא עם $n-1$ קשתות (לא ניתן להשתמש במרכז הכוכב) ולכן כל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ נחתכים בקשת מ־G. לכן ניתן לחזור על אותם טיעונים ולקבל ש־$|\mathcal{F}|\leq 2^{\binom{2n}{2}-\binom{2n}{2}/s}=2^{\binom{2n}{2}-n}$.

הילוכים מקריים

הילוך מהוסס על הקוביה

נגדיר הילוך מקרי על הקוביה הבוליאנית $\{0,1\}^n$ באופן הבא: X_0 הוא הווקטור $(0,\ldots,0)$ בהסתברות 1. בהינתן X_i, אנו נבחר בהסתברות $\frac{1}{2}$ את X_{i+1} להיות זהה לו, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נגדיר את X_{i+1} ע"י כך שנבחר באופן מקרי ויוניפורמי קורדינטה של X_i ונהפוך את ערכה, כששאר הקורדינטות ישארו אותו דבר. הוכיחו שעבור כל $\epsilon>0$ קבוע המרחק בין ההתפלגות של X_t לבין ההתפלגות היוניפורמית על $\{0,1\}^n$ קטן מ־ϵ, עבור $t=O(n\log n)$.

שתי שאלות על הילוכים מקריים מהוססים

נניח שאנו מבצעים על גרף G (במקום הילוך מקרי רגיל) את הפרוצדורה הבאה: בכל שלב, בסיכוי חצי נבצע את ההילוך המקרי לפי בחירה של שכן מקרי של הצומת הנוכחי, ובסיכוי חצי פשוט נישאר צעד אחד נוסף בצומת הנוכחי. נניח גם שהגרף עליו מתבצע ההילוך הוא קשיר. הוכיחו עבור הילוך כזה שני דברים.

- הילוך כזה תמיד יתכנס להתפלגות הסטצינרית (אותה אחת כמו עבור הילוך מקרי רגיל), גם אם הגרף הוא 2־צביע.
- זמני הביקור (הממוצעים) בהילוך כזה הם בדיוק כפולים מאלו של הילוך מקרי רגיל.

קשיים בהתקדמות

נגדיר הילוך מקרי מוטה על הישר. נקבע $X_0=0$, ולכל $i>0$ בהסתברות $\frac{1}{3}$ נקבע $X_i=X_{i-1}+1$ ובהסתברות $\frac{2}{3}$ נקבע $X_i=\max\{0,X_{i-1}-1\}$, ללא תלות בבחירות הקודמות. נסמן ב־t_k את תוחלת ההפרש בין ה־i הקטן ביותר כך ש־$X_i=k-1$ וה־j הקטן ביותר עבורו $X_j=k$. לדוגמא:

$$t_1 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{r-1}r=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{r-1}=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=s}^{\infty}\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{r-1}=\sum_{s=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{s-1}=3$$

חשבו את t_k.

טיול בגרף נאה

נתון ש־s ו־t הם צמתים בגרף 2־קשיר (בצמתים) ו־3־רגולרי (דרגות כל צמתיו 3) בעל n צמתים. הראו שמתקיים $k_{st}\leq\frac{3}{4}n^2$. ניתן להסתמך על ידע בפיזיקה.

בלי הרבה נפנוף ידיים

נניח ש־$X_0, X_1, \ldots$ הוא הילוך מקרי על הגרף (הלא מכוון והקשיר) G, אשר יוצא מ־v (ז"א $X_0 = v$ בהסתברות 1). נסמן ב־T את המ"מ המקבל את זמן החזרה הראשון ל־v לאחר היציאה ממנו, ז"א $T = \min\{t : X_t = v \wedge t > 0\}$, ונסמן $\tau = \mathrm{E}[T]$. לאחר פתרון תרגיל זה תדעו איך מוכיחים שמתקיים $\tau = 1/\pi_v$ (כאשר כאן π מסמן את ההתפלגות הסטציונרית).

הערות: בשאלות יש סימונים מהצורה "$o(1)$", אולם כדאי להעביר את הפורמליזם לאחד מהצורה "לכל $\epsilon > 0$ קבוע מתקיים עבור s גדול דיו... (שיכול להיות תלוי ב־G)".

עבור s גדול דיו, נסמן ב־H_s את מספר הפעמים שנכנסנו ל־v ב־s הצעדים הראשונים של ההילוך המקרי שלנו, ז"א $H_s = |\{i : X_i = v \wedge 1 \leq i \leq s\}|$.

- הראו שמתקיים $\mathrm{E}[H_s] = (1 \pm o(1))s\pi_v$.
- הראו שבסיכוי $1 - o(1)$, מתקיים $H_s = (1 \pm o(1))s/\tau$. רמז – לכל $j \geq 1$ אפשר לבדוק את תוחלת מספר הצעדים בין הביקור ה־$j-1$ וה־j ב־v. ניתן להשתמש בתכונות של מספר זה (למשל שהשונות שלו סופית) ללא הוכחה, כל עוד זה ברור מספיק שניתן להוכיח אותן.

מהסעיף השני נובע $\mathrm{E}[H_s] = (1 \pm o(1))s/\tau$ מכיוון שבכל מקרה H_s מקבל ערכים בין 0 ל־s, ואז משני הסעיפים יחד נובע המבוקש.

גם זו הרמונית

נתון גרף G (לא מכוון וקשיר) עם קבוצת צמתים V. לכל זוג צמתים $s \neq t$ וצומת v נגדיר את $U_{st}(v)$ להיות תוחלת מספר המעברים ב־v המבוצע ע"י הילוך מקרי המתחיל ב־s, עד לפגיעה הראשונה ב־t. אנו סופרים את היציאה מ־s (ז"א שמתקיים $U_{st}(s) \geq 1$) אולם לא את הכניסה ל־t (כך ש־$U_{st}(t) = 0$). נגדיר עתה את $\phi_{st} : V \to \mathbb{R}$ לפי $\phi_{st}(v) = U_{st}(v)/d(v)$. הראו שזוהי פונקציה הרמונית עם שפה $\{s, t\}$.

הערה: הפונקציה U_{st} משמשת בהוכחה המקורית של Tetali עבור h_{st}. שימו לב שמתקיים $h_{st} = \sum_{v \in V} U_{st}(v)$.

פתרונות לתרגילים על הילוכים מקריים

הילוך מהוסס על הקוביה

ההוכחה נעשית בשיטת הצימוד. ראשית נשים לב שניתן היה להגדיר באופן שקול את ההילוך המקרי $X_0, X_1, \ldots$ ע"י כך שבשלב ה־i קודם נבחר באופן יוניפורמי קואורדינטה $1 \leq j_i \leq n$, ורק אחר כך נחליט בהסתברות $\frac{1}{2}$ אם להפוך את הקורדינטה ה־j_i. עתה נגדיר הילוך מקרי שני $Y_0, Y_1, \ldots$ על הקוביה $\{0,1\}^n$ באופן הבא: Y_0 יבחר באופן מקרי ויוניפורמי מהקוביה. בשלב ה־i נבדוק מהי הקורדינטה שנבחרנו את X_{i+1} לפי X_i. אם X_i ו־Y_i זהים על הקורדינטה הנ"ל אז לבחירת Y_{i+1} אנו נהפוך את הקורדינטה אם ורק אם $X_{i+1} \neq X_i$ (ז"א שבסיכוי $\frac{1}{2}$ נהפוך אותה בשני ההילוכים, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ לא נהפוך אותה באף אחד מהם). אם X_i ו־Y_i שונים על הקורדינטה הנ"ל אז נהפוך אותה עבור Y_{i+1} אם ורק אם $X_{i+1} = X_i$.

ניתן לראות בשלב זה ש־$Y_0, Y_1, \ldots$ לכשעצמו הוא הילוך מקרי עם אותה מטריצת מעבר כמו $X_0, X_1, \ldots$. מכיוון שהתפלגות של Y_0 היא ההתפלגות הסטציונרית של ההילוך, ההתפלגות (הלא מותנה) של Y_t תהיה זהה לה לכל $0 \leq t$. נראה עתה שהמאורע $X_t = Y_t$ יקרה בהסתברות העולה על $1 - \epsilon$ עבור $t = n\ln(n/\epsilon) = O(n \log n)$ לסיום ההוכחה.

לכל $1 \leq j \leq n$ נגדיר את המאורע A_j כמאורע שהקורדינטה j נבחרה להפיכה אפשרית במעבר מ־X_i ל־X_{i+1} עבור $0 \leq i < t$ כל שהוא. ניתן לראות שאם A_j מתקיים אז X_t ו־Y_t יהיו שווים על הקורדינטה ה־j, ולכן אם $\bigwedge_{j=1}^{n} A_j$ מתקיים אז בפרט $X_t = Y_t$. אולם $\Pr[\neg A_j] = (1 - \frac{1}{n})^t < \epsilon/n$, ולכן $\Pr[\bigwedge_{j=1}^{n} A_j] > 1 - \epsilon$ כנדרש.

שתי שאלות על הילוכים מקריים מהוססים

התכנסות להילוך הסטציונרי

ישנן שתי שיטות להוכיח זאת. נתחיל מהשיטה האלגברית: נניח ש־P היא מטריצת המעבר של ההילוך המקרי (הלא־מהוסס) על הגרף ששלנו, ו־P' היא מטריצת המעבר של ההילוך המהוסס. מתקיים אם כן $P' = \frac{1}{2}(P + I)$ כאשר I מסמנת את מטריצת היחידה. מכאן שיש ל־P' אותם ווקטורים עצמיים כמו ל־P, כאשר עבור כל ערך עצמי λ של P יהיה ערך עצמי $\lambda' = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$ של P'.

כל שנותר עתה הוא להיזכר בכך שכל הערכים העצמיים של P הם ממשיים (הוכח בכיתה), שערכם הוא בין 1 ל־-1 (הוכח בתרגול, זה נובע מכך שהמדובר במטריצה שסכומי השורות שלה הם 1), ושיש רק ווקטור עצמי אחד, זה של ההתפלגות הסטציונרית, שעבורו הע"ע הוא 1 (זה נובע מקשירות הגרף, עובדה זו הוכחה בתרגול). נשים לב עתה שעבור $-1 \leq \lambda < 1$ מתקבל $|\lambda'| < 1$ ורק עבור $\lambda = 1$ מתקבל $\lambda' = 1$, ומכאן של־P' כל הערכים העצמיים קטנים מ־1 בערך מוחלט, פרט להתפלגות הסטציונרית, שהיא הווקטור העצמי היחידי שערכו העצמי הוא 1. מכאן נובע המבוקש.

עתה נסקור בקצרה את שיטת ההוכחה השניה. אפשר להשתמש בשיטת הצימוד: אנו נגדיר שני הילוכים מקריים מהוססים $\underline{X} = X_0, X_1, \ldots$ ו־$\underline{Y} = Y_0, Y_1, \ldots$ אשר לשניהם יהיו את מטריצת המעבר P', ההתפלגות הבלתי־מותנה של Y_0 (ולכן של כל Y_i) היא ההתפלגות הסטציונרית, ההתפלגות של $\underline{X}$ היא זו של ההילוך המקרי המקורי (מושג ע"י קביעת ההתפלגות של X_0 להיות זו של ההילוך המקורי באופן ב"ת ב־Y_0), וכן מתקיים $\Pr[Y_i = X_i] \to 1$.

לשם כך נבחר את (X_0, Y_0) כמתואר למעלה, ועתה נתאר את המעבר (המקרי) מ־(X_i, Y_i) ל־(X_{i+1}, Y_{i+1}). אם $X_i \neq Y_i$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $X_{i+1} = X_i$ ואת Y_{i+1} להיות שכן מקרי של Y_i לפי הגרף שלנו, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $Y_{i+1} = Y_i$ ואת X_{i+1} להיות שכן מקרי של X_i לפי הגרף. אם $X_i = Y_i$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע $X_{i+1} = Y_{i+1} = X_i$, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $X_{i+1} = Y_{i+1}$ להיות שכן מקרי של X_i. ההוכחה ששאר התכונות מתקיימות (מטריצות המעבר הלא מותנות של $\underline{X}$ ושל $\underline{Y}$, וכן התכנסות ההסתברות עבור המאורע $X_i = Y_i$) מושארת כתרגיל לקורא (עבור ההתכנסות, שימו לב שתמיד ניתן לחסום מלמטה את הסיכוי ש־$X_{i+n} = Y_{i+n}$ לכל צמד ערכים אפשרי של $X_i \neq Y_i$; לחילופין, אפשר לתאר את הצמדים (X_i, Y_i) לפני המפגש כהילוך מקרי רגיל על גרף מתאים, עם ריבוע מספר הצמתים של G, ולחסום ע"י זמני פגיעה).

זמני הביקור

ניתן לעשות רדוקציה של השאלה עבור הילוך מקרי מהוסס על הגרף G לשאלה על הילוך מקרי רגיל על גרף חדש G'. הגרף G' יוגדר ע"י כך שנהפוך כל קשת $e = v_i v_j$ של G למסלול מאורך 2 שבמרכזו צומת חדש u_e. אם ל־G היו n צמתים ו־m קשתות, אז לגרף החדש יהיו $n' = n + m$ צמתים ו־$m' = 2m$ קשתות. בנוסף, שימו לב שאם R_{st} הישן ההתנגדות השקולה בין s ל־t (כפי שהוגדרה בהרצאה) היא R_{st}, אז בגרף החדש זו תהיה $R'_{st} = 2R_{st}$.

עתה נסמן ב־$\underline{Y} = Y_0, Y_1, \ldots$ הילוך מקרי (לא מהוסס) על G' שמתחיל בצומת s (שקיימת גם ב־G וגם ב־G'). שימו לב עתה שסדרת המ"מ עם האינדכסים הזוגיים $Y_0, Y_2, \ldots$ מתפלגת בדיוק כמו הילוך מקרי מהוסס על הגרף המקורי G, בעוד שהמ"מ במקומות האי־זוגיים $Y_1, Y_3, \ldots$ לעולם לא יקבלו ערכים המתאימים לצמתי הגרף המקורי, ובפרט לא יוכלו לקבל את t. מכאן שזמן הביקור הממוצע בין s ו־t לפי ההילוך המהוסס על G זהה בדיוק למחצית זמן הביקור הממוצע בין s ל־t לפי ההילוך הלא־מהוסס על G'. נסמן ב־$\hat{k}_{st}$ את זמן הביקור לפי

ההילוך המהוסס, ב־k'_{st} את זמן הביקור לפי ההילוך על G', וב־k_{st} את זמן הביקור לפי הילוך לא מהוסס על G. כל שנותר עתה הוא לכתוב:

$$\hat{k}_{st} = \frac{1}{2}k'_{st} = m'R'_{st} = 4mR_{st} = 2k_{st}$$

קשיים בהתקדמות

כיוון שכל צעד בהילוך אינו תלוי בצעדים הקודמים, t_k הוא גם תוחלת ההפרש בין ה־i שהוא הפעם ה־r עבורו $X_i = k-1$ וה־$j > i$ הקטן ביותר עבורו $X_j = k$.

נחשב את t_k על סמך $t_1, \ldots, t_{k-1}$. נסמן ב־i את האינדקס הקטן ביותר עבורו $X_i = k-1$ וננתח את ההתפלגות של j, האינדקס הקטן ביותר עבורו $X_j = k$, מותנית על ערכו של i.

נסמן ב־i_r את האינדקס ה־r עבורו $x_{i_r} = k-1$ (בפרט $i_1 = i$). בהסתברות $\frac{1}{3}$ בדיוק מתקיים $X_{i_1+1} = k$ ואז $j = i_1 + 1$, ובהסתברות $\frac{2}{3}$ מתקיים $X_{i_1+1} = k-2$ ואז תוחלת i_2 היא $i_1 + 1 + t_{k-1}$. אז שוב בהסתברות $\frac{1}{3}$ נקבל $j = i_2 + 1$ ובהסתברות $\frac{2}{3}$ נקבל $X_{i_2+1} = k-2$. כך מתקבלת נוסחת הנסיגה:

$$\begin{aligned}
t_k &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[j - i | i_r < j < i_{r+1}\right] \cdot \Pr[i_r < j < i_{r+1}] \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} (1 + (r-1)(t_{k-1}+1)) \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{r-1} \\
&= \frac{-t_{k-1}}{3} \sum_{r=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{r-1} + \frac{t_{k-1}+1}{3} \sum_{r=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{r-1} r \\
&= 2t_{k-1} + 3
\end{aligned}$$

פתרון נוסחת הנסיגה נותן $t_k = 3 \cdot 2^k - 3$.

טיול בגרף נאה

בגרף 3־רגולרי בעל n צמתים יש בדיוק $m = \frac{3}{2}n$ קשתות. עתה נחסום את ההתנגדות השקולה R_{st}. מכיוון שהגרף הוא 2־קשיר, קיימים בין s ל־t שני מסלולים זרים בצמתים. תוספת צמתים וקשתות יכולה רק להקטין את ההתנגדות השקולה, ולכן אפשר לחסום את ההתנגדות השקולה ע"י זו של שני המסלולים האלו בלבד. אם אורכיהם הם αn ו־βn בהתאמה, אז מהנוסחא עבור נגדים במקביל נקבל התנגדות שקולה של $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}n$. קצת אלגברה חוסמת את זה ע"י $\frac{\alpha+\beta}{4}n$, ומכיוון ש־$\alpha + \beta \leq 1$ (המסלולים הם זרי צמתים פרט ל־s ו־t) קיבלנו $R_{st} \leq \frac{1}{4}n$, ולכן $k_{st} = 2mR_{st} \leq \frac{3}{4}n^2$ כנדרש.

בלי הרבה נפנוף ידיים (חלק ראשון)

נראה שעבור כל ϵ קיים S כך שאם $s > S$ אז $\mathrm{E}[H_s] = (1 \pm \epsilon)s\pi_v$. ראשית נראה זאת עבור המקרה שבו הגרף אינו דו צדדי. נסמן ב־A_t את משתנה האינדיקטור שמקבל 1 אם $X_t = v$ ומקבל 0 אחרת. מכיוון

שההתפלגות הלא מותנה של X_t שואפת להתפלגות הסטציונרית עבור $t \to \infty$, קיים T כך שאם $t > T$ אז $\mathrm{E}[A_t] = (1 \pm \epsilon/2)\pi_v$. כמו כן $0 \leq \mathrm{E}[A_t] \leq 1$ גם עבור $t \leq T$. לכן ניתן לבחור $S = 2T/\epsilon$ ואז עבור $s > S$ נקבל $\mathrm{E}[H_s] = \sum_{t=1}^{s} \mathrm{E}[A_t] = (1 \pm \epsilon)s\pi_v$ כנדרש.

עבור המקרה שבו הגרף דו צדדי, במקום לנתח את A_t מנתחים את $(A_t + A_{t+1})/2$. סכום זה ישאף להתפלגות הסטציונרית עבור $t \to \infty$, מכיוון שסכום ההתפלגויות הלא־מותנות של X_{t+1} ושל X_t לא יכיל בפירוקו לפי הווקטורים העצמיים של מטריצת המעבר את זה המתאים לערך העצמי -1 (המקדמים המתאימים יתקזזו).

בלי הרבה נפנוף ידיים (חלק שני)

נראה שעבור כל ϵ, δ קיים S כך שאם $s > S$ אז $H_s = (1 \pm \epsilon)s/\tau$ בהסתברות לפחות $1 - \delta$. נגדיר סידרה של מ"מ $Y_1, Y_2, \ldots$ אשר יקבעו ע"י ההילוך המקרי שלנו. Y_j יהיה מספר הצעדים בין הביקור ה־$j-1$ לבין הביקור ה־j ב־v, כאשר הביקור $X_0 = v$ יקרא "הביקור ה־0". נשים לב שלכל $j > 0$ מתקיים $\mathrm{E}[Y_j] = \tau$, שה־Y_j כולם ב"ת (עקב תכונת חוסר הזיכרון של ההילוך המקרי), ושקיים α סופי (תלוי בגרף) כך ש־$\mathrm{V}[Y_j] = \alpha$ (לא קשה להוכיח זאת, אבל בשאלה עצמה נאמר שלא צריך).

אם לא מתקיים $H_s = (1 \pm \epsilon)s/\tau$, אז ישנן שתי אפשרויות. אם $H_s > (1+\epsilon)s/\tau$, אז בפרט חייב להתקיים $\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)s/\tau} Y_j \leq s$. עתה אפשר להשתמש בשיטת המומנט השני: מתקיים $\mathrm{E}[\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)s/\tau} Y_j] = (1+\epsilon)s$ וכן $\mathrm{V}[\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)s/\tau} Y_j] = (1+\epsilon)s\alpha/\tau$, ולכן עבור s גדול דיו הסיכוי לסטיה של $\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)/\tau} Y_j$ ב־ϵs מהממוצע חסום ע"י $\delta/2$.

אם $H_s < (1-\epsilon)s/\tau$, אז בפרט חייב להתקיים $\sum_{j=1}^{(1-\epsilon)s/\tau} Y_j \geq s$, וגם כאן אפשר להשתמש בשיטת המומנט השני ולקבל שגם כאן עבור s גדול דיו הסיכוי לסטיה של $\sum_{j=1}^{(1-\epsilon)s/\tau} Y_j$ ב־ϵs מהממוצע חסום ע"י $\delta/2$. מאיחוד שתי האפשרויות לסטיה אנו מקבלים את המבוקש.

גם זו הרמונית

נסמן ב־$X_0, X_1, \ldots$ הילוך מקרי המתחיל ב־s, ועבור $v \in V$ ו־$k \geq 0$ נגדיר את מ"מ האינדיקטור $A_k^{(v)}$ אשר מקבל 1 אם $X_k = v$ ולא קיים $l \leq k$ עבורו $X_l = t$, ואחרת מקבל 0. שימו לב שבפרט $A_0^{(v)} = 1$ אם ורק אם $v = s$, וש־$A_k^{(t)} = 0$ לכל k. כמו כן $\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(v)}$ הוא בדיוק מספר הפעמים שההילוך ביקר ב־v לפני שהגיע לראשונה ל־t, ולכן מלינאריות התוחלת מתקיים עבור הפונקציה שלנו $\phi_{st}(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[A_k^{(v)}]$.

שימו לב עתה שלכל $k > 0$, לכל $v \in V \setminus \{s, t\}$ ולכל סדרת ערכים $\langle b_u \rangle_{u \in V}$ (שמתקבלים בהסתברות חיובית) משתני האינדיקטור שלנו מקיימים $\Pr[A_k^{(v)} = 1 | \forall_{u \in V} A_{k-1}^{(u)} = b_u] = \sum_{u \in N(v)} \frac{1}{d(u)} b_u$ ישירות מהגדרות ההילוך המקרי, ולכן מתקיים $\mathrm{E}[A_k^{(v)}] = \sum_{u \in N(v)} \frac{1}{d(u)} \mathrm{E}[A_{k-1}^{(u)}]$. זה נכון גם עבור מקרי הקצה ש־s ו/או t נמצאים בשכנים של v. דבר נוסף לשים לב הוא שעבור $v \in V \setminus \{s, t\}$ מתקיים $\phi_{st}(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(v)}$ (כי $A_0^{(v)} = 0$), ואז ניתן לסיים:

$$\phi_{st}(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[A_k^{(v)}] = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} \frac{1}{d(u)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[A_k^{(u)}] \right) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} \phi_{st}(u)$$