פתרונות לתרגיל ראשון

רמזי עם איסורים

הערה: אפשר לפתור את השאלה ללא שיטה הסתברותית, ע"י שימוש במשפט טוראן. כאן נראה פתרון עם שימוש פשוט בשיטה הסתברותית.

את $R(k)$ נבחר להיות זהה לערך $R(k)$ של משפט רמזי המקורי, ז"א הערך עבורו בגרף עם $R(k)$ צמתים תמיד יהיה או קליק בעל k צמתים או קבוצה חסרת קשתות בת k צמתים. עבור $\gamma(k)$ נבחר את הערך $1/(R(k))^2$.

בהינתן גרף G בעל $n \geq R(k)$ צמתים וקבוצה F של לא יותר מ־$\gamma\binom{n}{2}$ זוגות אסורים, ראשית נבחר קבוצה $V' \subseteq V$ בת $R(k)$ צמתים בדיוק, באופן יוניפורמי מתוך $\binom{n}{R(k)}$ הקבוצות האפשריות. לכל זוג $uv \in F$, הסיכוי שמתקיים גם $u \in V'$ וגם $v \in V'$ הוא $\frac{R(k)(R(k)-1)}{n(n-1)} = \binom{n-2}{R(k)-2}/\binom{n}{R(k)}$. על כן, לפי איחוד מאורעות, הסיכוי שיש איזה שהוא זוג צמתים מ־V' ששייך ל־F חסום ע"י $1 > \gamma\binom{R(k)}{2} \geq |F|\frac{R(k)(R(k)-1)}{n(n-1)}$.

מכאן שיש בחירה אפשרית של V' כך שאף זוג מתוכה אינו איבר ב־F. ניקח את G', תת הגרף של G המושרה על V', ועליו נפעיל את משפט רמזי המקורי. בזאת מצאנו תת קבוצה בת k צמתים של V' שהיא או קליק או חסרת קשתות, אשר אף זוג מתוכה אינו שייך ל־F (בגלל ש־V' היא כזו).

קשתות לטווח קצר

נבחר את u באופן מקרי ויוניפורמי מכל צמתי U, ונחשב את התוחלת של $|F_u|$. לכל צומת $v \in V$ נסמן את הדרגה שלו ב־d_v. עבור קשת wv, הסיכוי שלה להיות ב־F_u הוא בדיוק הסיכוי ש־u ייבחר להיות שכן של v, ז"א d_v/n. על כן, תוחלת מספר הקשתות הסמוכות ל־v שנמצאות ב־F_u היא $(d_v)^2/n$. על מנת לחשב את תוחלת מספר הקשתות הכולל ב־F_u לפי לינאריות התוחלת, נסכום על כל $v \in V$ (כל קשת ב־E סמוכה ל־$v \in V$ אחד בדיוק), ונקבל $\mathrm{E}[|F_u|] = \sum_{v\in V}(d_v)^2/n = n\sum_{v\in V}(d_v/n)^2 \geq (\sum_{v\in V}(d_v/n))^2 = \alpha^2 n^2$.

הסבר: אי השוויון למעלה הוא אי־שוויון הנורמות, ולאחריו השתמשנו ב־$\sum_{v\in V} d_v = |E| = \alpha n^2$. מכיוון שהראינו שמתקיים $\mathrm{E}[|F_u|] \geq \alpha^2 n^2$, נובע מכך שקיימת בחירה ספציפית של u עבורה $|F_u| \geq \alpha^2 n^2$, כנדרש.

קירבה לדרגה קבועה

ראשית נבצע ניתוח הסתברותי עבור d כללי, ואחר כך נבחר d שיתאים לנו. עבור שני צמתים $u, v \in V$, הסיכוי ש־uv תהיה קשת הוא α/n בדיוק. התוחלת של מספר השכנים של u פרט ל־v (אם הוא שכן או לא) היא $(n-2)\cdot\alpha/n < \alpha$. על כן לפי אי שוויון מרקוב, הסיכוי של־u יהיו לפחות d שכנים שאינם v הוא קטן מ־α/d. בדומה לכך, הסיכוי של־v יהיו לפחות d שכנים שאינם u קטן מ־α/d, ולכן הסיכוי שלפחות אחד המאורעות האלו קורה הוא פחות מ־$2\alpha/d$.

עתה, נשים לב שהמאורע על מספר השכנים של u ו־v מחוץ לצמתים אלו הוא ב"ת במאורע ש־uv קשת בעצמה, בגלל שבפרט כל זוג שאינו uv נבחר להיות קשת באופן ב"ת לבחירה של האם uv קשת. על כן, הסיכוי של uv להיות קשת אשר לפחות אחד מצמתיה בעל דרגה גדולה מ־d (ז"א עם לפחות d שכנים מחוץ ל־uv עצמה) חסום ע"י $2\alpha^2/dn$.

מכאן, לפי לינאריות התוחלת, תוחלת מספר הקשתות עם לפחות צומת אחד מדרגה גבוהה מ־d היא קטנה מ־α^2/d $\binom{n}{2}(2\alpha^2/dn) <$. בחירה של $d = \alpha^2/\beta\gamma$ תיתן לנו (שוב לפי אי שוויון מרקוב) שבסיכוי יותר מ־$1-\gamma$ לא יהיו יותר מ־βn קשתות סמוכות לצמתים מדרגה גבוהה מ־d. במידה וזה קורה, אם אנחנו נסיר את כל הקשתות הנ"ל, אז לא יישארו קשתות סמוכות לצמתים מדרגה גבוהה מ־d, ולכן בפרט לא יהיו צמתים מדרגה כזו בגרף.

פתרונות לתרגיל שני

מרחב מדגם מוגבל מוטה

ראשית נבנה מרחב הסתברות עם משתנים מקריים $Z_1,\ldots,Z_n$, כך שכל Z_i מתפלג יוניפורמית מעל $\{0,1,2\}$, וכן כל המשתנים הנ"ל הם ב"ת בזוגות. מאלו אפשר לבנות את $X_1,\ldots,X_n$ ע"י כך שנקבע $X_i=1$ אם $Z_i=0$ ואחרת $X_i=0$. עבור בחירת $Z_1,\ldots,Z_n$, ניקח $k=\lfloor\log_2 n\rfloor+1$, נגריל את $Y_1,\ldots Y_k$ להיות משתנים מקריים יוניפורמים ב־$\{0,1,2\}$ וב"ת לחלוטין, ואז לכל קבוצה $\emptyset\neq A\subseteq\{1,\ldots,k\}$ נגדיר את $Z_A=\bigoplus_{a\in A}Y_a$, כאשר כאן $\bigoplus$ מסמן סכום מודולו 3. לבסוף, נגדיר $Z_i=Z_{A_i}$ כאשר $A_1,\ldots A_n$ הן קבוצות לא־ריקות שונות זו מזו.

גודל מרחב ההסתברות הוא $3^k=O(n^{\log_2 3})$, וזה פולינומי ב־n. ההוכחה שכל מ"מ Z_A מתפלג יוניפורמית ב־$\{0,1,2\}$ מאוד דומה לזו שנעשתה בתרגול עבור מרחבי דגימה מוגבלים, ולא נציג אותה מחדש כאן.

באשר לאי־תלות, נראה למשל שמתקיים $\Pr[Z_A=0|Z_B=0]=\frac{1}{3}$ לכל $A\neq B$. לצורך זה נניח שקיים איבר $b\in B\setminus A$ (המקרה שבו קיים איבר ב־$A\setminus B$ הוא בעל הוכחה זהה). נניח לשם פישוט הביטויים שנכתוב שמתקיים גם $b=1$, כמובן שההוכחה תהיה אותו דבר ל־b אחרים. נשים עתה לב שלכל $\beta_2,\ldots,\beta_k$ מתקיים:

$$\Pr[Z_A=0|Y_2=\beta_2,\ldots,Y_k=\beta_k]=\Pr\Big[Y_1=3-\bigoplus_{a\in A\setminus\{1\}}\beta_a\Big|Y_2=\beta_2,\ldots,Y_k=\beta_k\Big]=\frac{1}{3}$$

מכאן אפשר לסיים לפי נוסחת ההסתברות השלמה (תוך שימוש בכך שערך Z_B נקבע ע"י ערכי $Y_2,\ldots,Y_k$).

$$\begin{aligned}\Pr[Z_A=0|Z_B=0] &= \sum_{\beta_2,\ldots,\beta_k}\Pr[Z_A=0|Y_2=\beta_2,\ldots,Y_k=\beta_k]\Pr[Y_2=\beta_2,\ldots,Y_k=\beta_k|Z_B=0]\\ &= \sum_{\beta_2,\ldots,\beta_k}\frac{1}{3}\Pr[Y_2=\beta_2,\ldots,Y_k=\beta_k|Z_B=0]=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

תפישת קשתות

לכל קשת $uv\in E$ של הגרף המקורי $G=(V,E)$, נסמן ב־A_{uv} את המאורע שגם u וגם v נבחרו ל־V' (ואז uv קשת בתת הגרף המושרה). נסמן ב־X_{uv} את משתנה האינדיקטור, המקבל ערך 1 אם A_{uv} מתקיים, ואחרת מקבל ערך 0. אנחנו אם כן נהיה מעוניינים בסכום $X=\sum_{uv\in E}X_{uv}$.

עבור התוחלת, עבור $uv\in E$ ספציפי נשים לב שגם $u\in V'$ וגם $v\in V'$ מתקיימים יחדיו בהסתברות $1/n$ בדיוק, ולכן $\mathrm{E}[X]=|E|/n\geq n^{1/2}$.

עתה נפנה לחישוב מומנט שני. עבור שתי קשתות $uv,u'v'\in E$ נחשב את $\mathrm{Cov}[X_{uv},X_{u'v'}]$ לפי מקרים.

אם $uv=u'v'$ אז $\mathrm{Cov}[X_{uv},X_{u'v'}]=\mathrm{V}[X_{uv}]\leq\Pr[X_{uv}=1]=1/n$, ויש $|E|\leq 5n^{3/2}$ "זוגות" כאלו (החסם על גודל קבוצת הקשתות E נובע מהחסם על הדרגה המקסימלית).

אם ל־uv ו־$u'v'$ יש בדיוק צומת אחד משותף, אז (בדומה למה שנעשה בכיתה עם פונקציית סף לקיום קליק) $\mathrm{Cov}[X_{uv},X_{u'v'}]=\mathrm{E}[X_{uv}X_{u'v'}]-\mathrm{E}[X_{uv}]\mathrm{E}[X_{u'v'}]\leq\Pr[A_{uv}\wedge A_{u'v'}]=n^{-3/2}$. מספר הזוגות הנ"ל חסום ע"י $20|E|n^{1/2}\leq 100n^2$ (כל אחד משני הצמתים של $uv\in E$ יכול להשתתף בפחות מ־$10n^{1/2}$ קשתות אחרות).

אם uv ו־$u'v'$ זרות, אז המאורעות המתאימים הם ב"ת ולכן $\mathrm{Cov}[X_{uv},X_{u'v'}]=0$.

סה"כ אנחנו מקבלים $\mathrm{V}[X]=\sum_{uv,u'v'\in E}\mathrm{Cov}[X_{uv},X_{u'v'}]\leq 105n^{1/2}$. על מנת לסיים, משתמשים באי שוויון צ'בישף, למשל עם $\lambda=n^{1/8}$ לקבלת $\Pr[X<n^{1/2}-\sqrt{105}n^{3/8}]<n^{-1/4}$.

לכל תת קבוצה $A \subset \{1,\ldots,n\}$ מגודל k נסמן ב־Y_A את האינדיקטור עבור המאורע שכל המשתנים $\langle X_i : i \in A\rangle$ קיבלו ערך זהה. חישוב מיידי מראה שמתקיים $\Pr[Y_A] = n^{1-k}$. עתה נסמן את הסכום $Y = \sum_{A\subset\{1,\ldots,n\},|A|=k} Y_A$. צריך להראות שבהסתברות $1-o(1)$ מתקיים $Y > 0$. מכיוון שזה משתנה אי־שלילי, על מנת להשתמש באי־שוויון צ'בישף מספיק להראות שעבור כל k קבוע מתקיים $\mathrm{V}[Y] = o((\mathrm{E}[Y])^2)$, כמו שנעשה בכיתה עם הוכחת פונקציית הסף (ראו בחוברת ההרצאות, למרות שהשנה זה הועבר בתרגול).

חישוב מהיר מראה שמתקיים $\mathrm{E}[Y] = \binom{n}{k} n^{1-k} = \Theta(n)$ (כזכור k הוא קבוע שעבורו צריך להוכיח את הנדרש, ולכן אפשר "לבלוע" מקדמים שתלויים בו בסימן ה־O). לחישוב $\mathrm{V}[Y]$, נשים לב שאם $A \cap B = \emptyset$ אז Y_A ו־Y_B הם בלתי־תלויים. לכל זוג קבוצות אחר נחשב את $\mathrm{Cov}[X_A, Y_B]$ ואח"כ נסכום את כולם.

נפצל למקרים לפי $|A\cap B|$, שיכול להיות בין 1 ל־k (אנחנו כוללים את המקרה של $A = B$ בניתוח). אם נסמן $|A \cap B| = l$, אז מתקיים $|A \cup B| = 2k - l$. מתקיים $\mathrm{Cov}[Y_A, Y_B] \leq \mathrm{E}[Y_A Y_B] = \Pr[Y_A = 1 \wedge Y_B = 1]$ (כי אלו משתני אינדיקטור שיכולים לקבל רק 0 או 1), וזה בדיוק הסיכוי שכל המשתנים $\langle X_i : i \in A \cup B\rangle$ קיבלו ערך זהה. הסיכוי למאורע הנ"ל הוא $n^{1-|A\cup B|} = n^{1+l-2k}$. כמו כן, מספר הזוגות הנ"ל חסום ע"י n^{2k-l} אפילו ע"י החישוב הגס ביותר. נותר רק לסכום.

$$\mathrm{V}[Y] = \sum_{A,B} \mathrm{Cov}[Y_A, Y_B] = \sum_{l=1}^{k} \sum_{A,B:|A\cap B|=l} \mathrm{Cov}[Y_A, Y_B] \leq \sum_{l=1}^{k} n^{2k-l} \cdot n^{1+l-2k} = kn$$

החסם הנ"ל הוא $O(n)$ עבור k קבוע, ובפרט מקיים $\mathrm{V}[Y] = o((\mathrm{E}[Y])^2)$.

פתרונות לתרגיל שלישי

דרגה, צביעה, מותן

פיתרון השאלה נעשה באמצעות הגרלה עם תיקונים. נראה כאן שיטה שמשתמשת בשאלה "קירבה לדרגה קבועה" מדף התרגילים הראשון. נתחיל אם כן עם הגרף המקרי המוגרל לפי $G(n,\alpha/n)$, עבור α שנבחר בהמשך.

בסופו של דבר נרצה להסיר מהגרף קשתות. על כן ננתח כמה קשתות יהיו בתוך כל קבוצה בת לפחות n/k צמתים. עבור קבוצה A קבועה, מספר הקשתות בתוכה הוא סכום של $\binom{|A|}{2}$ משתנים מקריים ב"ת שכל אחד מהם מקבל 1 בהסתברות α/n ו־0 בהסתברות $1-\alpha/n$. עבור n גדול דיו התוחלת של מספר הקשתות היא לפחות $\frac{\alpha}{3k^2}n$, ולכן לפי חסם צ'רנוף כפלי (שלמדתם בתרגול) עם $\delta=\frac{1}{2}$, ההסתברות שיהיו פחות מ־$\frac{\alpha}{6k^2}n$ קשתות כאלו חסומה ע"י $e^{-\alpha n/24k^2}$. נבחר $\alpha=24k^2$, ואז בהתסברות $1-o(1)$ (לפי איחוד מאורעות על לא יותר מ־2^n קבוצות אפשריות) בכל קבוצה A כזו יהיו לפחות $\frac{\alpha}{6k^2}n$ קשתות.

עבור גרף G המקיים את הנ"ל, גם אם נסיר ממנו פחות מ־$\frac{\alpha}{6k^2}n$ קשתות, לא נוכל לצבוע אותו ב־k צבעים, בגלל שעדיין לא תהיה לנו קבוצה חסרת־קשתות בת לפחות n/k קשתות. עתה נשתמש בשאלה "קרבה לדרגה קבועה" עם $\beta=\frac{\alpha}{12k^2}n$ ו־$\gamma=\frac{1}{3}$, כדי להבטיח שבהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ נוכל להסיר לא יותר מ־βn קשתות ולקבל גרף עם דרגה חסומה ע"י d, כאשר d הוא הקבוע המתאים התלוי ב־α,β,γ, שלושה קבועים שנבחרו כאן עם תלות ב־k בלבד.

עתה ננתח את מספר המעגלים מגודל קטן מ־$C\log n$ עבור C כל שהוא. נחסום עבור n גדול דיו את תוחלת מספר המעגלים: $\sum_{i=3}^{C\log n-1}\frac{n!}{2i(n-i)!}\cdot\frac{\alpha^i}{n^i}\leq\sum_{i=3}^{C\log n-1}\alpha^i\leq\alpha^{C\log n}$. עבור $C>0$ קטן מספיק (תלוי ב־α וב־β שתלויים רק ב־k), התוחלת הזו תהיה קטנה ממש מ־$\frac{1}{3}\beta n$, ולכן מאי שוויון מרקוב בסיכוי לפחות $\frac{2}{3}$ יהיו בגרף פחות מ־βn מעגלים, שניתן להסיר את כולם ע"י כך שמסירים קשת אחת מכל מעגל.

מאיחוד מאורעות, בסיכוי חיובי הגרף G יקיים את כל שלושת התנאים: הוא לא יהיה k־צביע כל עוד מסירים ממנו פחות מ־$\frac{\alpha}{6k^2}n=2\beta n$ קשתות, יהיה ניתן להפוך אותו לבעל דרגה חסומה ע"י d ע"י הסרה של לא יותר מ־βn קשתות, ויהיה ניתן להפוך אותו לחסר מעגלים מגודל קטן מ־$C\log n$ ע"י הסרה של פחות מ־βn קשתות נוספות. לכן, אם לוקחים G כזה ומסירים ממנו את הקשתות עבור סיפוק תנאי הדרגה והמעגלים, מקבלים את הגרף המבוקש.

גרף ופרמוטציה

ראשית, נראה שמתקיים $\mathrm{E}[X]=\alpha n$. נסמן לשם הנוחות את צמתי G ב־$V=\{1,\ldots,n\}$, ונגדיר את משתנה האינדיקטור I_i עבור המאורע $(i,\sigma(i))\in E$, לכל $1\leq i\leq n$. מתקיים $\mathrm{E}[I_i]=d(i)/n$ וכן $X=\sum_{i=1}^n I_i$, ולכן מלינאריות התוחלת מתקיים $\mathrm{E}[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d(i)=\alpha n$.

עתה נגדיר מרטינגל חשיפה $X_0,\ldots X_n$ של σ עבור X, לפי $\mathcal{D}_i=\{1,\ldots,i\}$. שימו לב למשל שמתקיים $X_{n-1}=X_n$ בהתסברות 1, כי ערך הפרמוטציה $\sigma(n)$ כבר נקבע לפי $\sigma(1),\ldots,\sigma(n-1)$. על מנת להשלים את הוכחה נראה שלכל i תמיד מתקיים $|X_i-X_{i-1}|\leq 2$, ואז ניתן לפי משפט אזומה לקבל את המבוקש עם $C=4$.

לשם כך נראה עבור כל $j_1,\ldots j_{i-1}$ שונים זה מזה ו־j,k שונים זה מזה ומ־$j_1,\ldots,j_{i-1}$, שההפרש $|\mathrm{E}[X|\sigma(1)=j_1,\ldots,\sigma(i-1)=j_{i-1},\sigma(i)=j]-\mathrm{E}[X|\sigma(1)=j_1,\ldots,\sigma(i-1)=j_{i-1},\sigma(i)=k]|$ חסום ע"י 2. בשביל זה נראה התאמה חח"ע ועל בין כל הפרמוטציות ש־i הערכים הראשונים שלהן הם $j_1,\ldots,j_{i-1},j$ לבין כל הפרמוטציות ש־i הערכים הראשונים שלהן הם $j_1,\ldots,j_{i-1},k$. בהינתן פרמוטציה σ השייכת לקבוצה הראשונה, נגדיר את σ' באופן הבא: נבחר את ה־l עבורו $\sigma(l)=k$, ונשים לב שמתקיים $l\in\{i+1,\ldots n\}$ (הנחנו שגם k אינו בין $j_1,\ldots j_{i-1}$). נגדיר את $\sigma'(i)=k$, את $\sigma'(l)=j$, ושאר ערכי σ' יהיו זהים לאלו של σ. לא קשה לראות (ובשלב הזה של הקורס כבר מותר להתבטא כך על טענה כזו) שזו עדיין פרמוטציה, ושההעתקה היא חח"ע ועל (אפשר להגדיר באופן אנלוגי את ההעתקה ההופכית).

על מנת לסיים, נשים לב ש־$\mathrm{E}[X(\sigma)|\sigma(1) = j_1, \ldots, \sigma(i-1) = j_{i-1}, \sigma(i) = k]$ זהה לחלוטין ל־$\mathrm{E}[X(\sigma')|\sigma(1) = j_1, \ldots, \sigma(i-1) = j_{i-1}, \sigma(i) = j]$, בגלל שהמדובר בהעתקה חח"ע ועל. כמו כן, לכל σ ש־i הערכים הראשונים שלה הם $j_1, \ldots, j_{i-1}, j$, מתקיים $|X(\sigma) - X(\sigma')| \leq 2$, מכיוון שהפרמוטציות נבדלות ביניהן בשני מקומות (i ו־l בסימונים מקודם), וכל אחד מהמקומות האלו יכול להשפיע על איבר אחד של $\{i : (i, \sigma(i)) \in E\}$.

היה מותר בשלב זה להגיד בקצרה "מכיוון שהחסם נכון לכל פרמוטציה לחוד, הוא נכון גם עבור התוחלות המתאימות, ולכן $|X_i - X_{i-1}| \leq 2$", אבל נראה כאן הוכחה מפורטת. ניזכר ונפתח את ההגדרה של המשתנים המקריים של המרטינגל כפונקציות של מבנה נתון, במקרה זה פרמוטציה $\tilde{\sigma}$ (שאח"כ כזכור מגרילים אותה): $X_i(\tilde{\sigma}) = \mathrm{E}[X|\sigma(1) = \tilde{\sigma}(1), \ldots, \sigma(i) = \tilde{\sigma}(i)]$. לפי זה נכתוב את $\mathrm{X}_{i-1}(\tilde{\sigma})$:

$$
\begin{aligned}
X_{i-1}(\tilde{\sigma}) &= \mathrm{E}[X|\sigma(1) = \tilde{\sigma}(1), \ldots, \sigma(i-1) = \tilde{\sigma}(i-1)] \\
&= \frac{1}{n+1-i} \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{\tilde{\sigma}(1),\ldots,\tilde{\sigma}(i-1)\}} \mathrm{E}[X|\sigma(1) = \tilde{\sigma}(1), \ldots, \sigma(i-1) = \tilde{\sigma}(i-1), \sigma(i) = k]
\end{aligned}
$$

ראינו כאן ש־$X_{i-1}(\tilde{\sigma})$ הוא ממוצע של ערכים שכל אחד מהם נמצא במרחק של לא יותר מ־2 מהערך של $X_i(\tilde{\sigma})$, ולכן גם $X_{i-1}(\tilde{\sigma})$ עצמו נמצא במרחק של לא יותר מ־2 מ־$X_i(\tilde{\sigma})$, כנדרש.

פתרונות לתרגיל רביעי

חלוקה בנטל

לכל צומת $v \in V$ נגריל באופן מקרי, יוניפורמי וב"ת האם הוא יהיה ב־V_1 או ב־V_2. לכל v מדרגת יציאה $d(v) > C_k$ (אח"כ נקבע את C_k), נסמן ב־B_v את המאורע שהדרגה שלו בתת הגרף המתאים אינה נמצאת בין $\frac{1}{3}d(v)$ לבין $\frac{2}{3}d(v)$. ל־v מדרגה שאינה עולה על C_k פשוט נגדיר את B_v כמאורע בסיכוי 0. לפי חסמי סטיות גדולות, קיים $\alpha > 0$ כך ש־$\Pr[B_v] < 2^{1-\alpha d(v)}$ לכל v.

עתה לכל v נגדיר את המספר $x_v = 1 - 2^{-\alpha/k}$, ואחרי זה נגדיר את C_k להיות גדול דיו כך שמתקיים $2^{\alpha C_k/k} \geq 2/(1-2^{-\alpha/k})$. נסמן ב־$D_v$ את קבוצת המאורעות $\{B_w : \exists u(vu, wu \in E)\}$, ז"א את כל המאורעות הקשורים בצמתים שיש להם צומת יציאה משותף עם v. נשים לב ש־B_v אינו תלוי לחלוטין במאורעות שאינם ברשימה D_v, וכן נשים לב שמתקיים $|D_v| \leq (k-1) \cdot d(v)$ לפי הנתון על כך שכל דרגות הכניסה חסומות ע"י k.

על כן אם $d(v) \geq C_k$ אז $\prod_{w\in D_v}(1-x_w) \geq 2^{-\alpha(k-1)d(v)/k} \geq 2^{\alpha C_k/k}2^{-\alpha d(v)} \geq 2^{1-\alpha d(v)}/(1-2^{-\alpha/k})$, ואז ניתן לוודא שמתקיים $\Pr[B_v] < 2^{1-\alpha d(v)} \leq x_v \prod_{w\in D_v}(1-x_w)$, ז"א שאפשר להפעיל את הלמה הלוקלית ולראות שקיימת חלוקה עבורה אף מאורע B_v אינו מתקיים, כנדרש.

שימוש באי שוויון פינסקר

קודם כל נצטט את אי השוויון: עבור שני מרחבי הסתברות μ ו־ν מעל אותו מרחב הסתברות בדיד S, מתקיים $d(\mu,\nu) \leq \sqrt{\frac{1}{2}D(\mu\|\nu)}$, כאשר d מסמן את המרחק בין ההתפלגויות (ראו את התרגילים הראשונים בחוברת התרגילים) ו־D מסמן את מרחק האנטרופיה היחסית.

עתה נניח שיש לנו שני משתנים מקריים X ו־Y, ונגדיר שני מרחבי הסתברות על הערכים שלהם, כפי שהוגדרו בשיעור בהוכחה על אי השליליות של $\mathrm{I}[X,Y]$. המרחב μ יוגדר לפי $\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] = \Pr[X=\alpha \wedge Y=\beta]$, והמרחב ν יוגדר לפי $\Pr_\nu[(\alpha,\beta)] = \Pr[X=\alpha]\Pr[Y=\beta]$. עתה נפתח, כאשר הסכומים הם על α ו־β שיש להם סיכוי חיובי להתקבל כערך המ"מ המתאימים:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X,Y] &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \alpha\beta \Pr[X=\alpha \wedge Y=\beta] - (\sum_\alpha \alpha \Pr[X=\alpha])(\sum_\beta \beta \Pr[X=\beta]) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \alpha\beta(\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]) \\
&= \sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] > \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]} \alpha\beta(\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]) - \sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] < \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]} \alpha\beta(\Pr_\nu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\mu[(\alpha,\beta)])
\end{aligned}$$

בסוף יצא לנו הפרש של שני סכומים, כ"א מהם של איברים חיוביים. עכשיו משתמשים בנתון שערכי המ"מ הם בין 0 ל־1, ואז המחוסר חסום ע"י $\sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)]>\Pr_\nu[(\alpha,\beta)]}(\Pr_\mu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\nu[(\alpha,\beta)]) \leq d(\mu,\nu)$, והמחסר גם חסום ע"י $\sum_{\Pr_\mu[(\alpha,\beta)]<\Pr_\nu[(\alpha,\beta)]}(\Pr_\nu[(\alpha,\beta)] - \Pr_\mu[(\alpha,\beta)]) \leq d(\mu,\nu)$. על כן $|\mathrm{Cov}[X,Y]| \leq d(\mu,\nu)$. מכאן ההמשך נובע מאי־שוויון פינסקר ומה שנלמד בכתה על הקשר בין המידע המשותף לבין מרחק האנטרופיה היחסית המתאים:

$$|\mathrm{Cov}[X,Y]| \leq d(\mu,\nu) \leq \sqrt{\frac{1}{2}D(\mu\|\nu)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{I}[X,Y]}$$

שאלה קלה על מאמר קשה

הניסוח: לכל r ו־a קיימים $\gamma(r,a)$ ו־$N(r,a)$ כך שאם G היפרגרף r־יוניפורמי עם $n > N$ צמתים, דרגות כל הצמתים הם בטווח $(1 \pm \gamma)D$ עבור D מתאים, ואין שני צמתים עם יותר מ־γD קשתות משותפות, אז אפשר לחלק את קשתות ההיפרגרף ללפחות $(1-a)D$ קבוצות שכ"א מהן היא כיסוי של צמתי ההיפרגרף.

כמו כן, לכל r ו־b קיימים $\gamma(r,b)$ ו־$N(r,b)$ כך שאם G היפרגרף עם תנאים כמו למעלה, אז אפשר לצבוע את הקשתות בלא יותר מ־$(1+b)D$ צבעים כך שאין שתי קשתות נחתכות מאותו צבע.

ההבדל בתנאים: כאן יש תנאי יותר חזק על הדרגות של צמתים בודדים, דורשים שכולם יהיו באותו טווח צר של דרגות. אצלנו דרשנו רק שלפחות $(1-\gamma)n$ מהצמתים יהיו בטווח הדרגות, וששאר הצמתים לא יהיו עם דרגה גדולה מדי (עם פרמטר ש־γ ו־N תלויים גם בו). התנאי ש־D גדול דיו לא נדרש, כי ממילא אפשר לכוון את γ כך שהתנאי על דרגות משותפות לזוגות צמתים יהיה בלתי ניתן למימוש עבור D קטן מדי.

הערות: לא ירדו נקודות על הדברים הבאים.

- אם כתבתם רק אחת משתי המסקנות שמתקיימות עבור היפרגרפים שמקיימים את התנאים (למשל רק את המסקנה עם הכיסויים).
- אם ציינתם טווח קצת אחר (אבל עם אותו עיקרון) על דרגות הצמתים, למשל אם כתבתם כמו בניסוח של המאמר, שכל הדרגות חייבות להיות בין $(1-\gamma)D$ ל־D (וכמובן שגם לא ירדו נקודות על שימוש באותיות אחרות עבור הפרמטרים).
- אם לא עליתם על זה שאפשר "לבלוע" את התנאי על גודל D בתוך התנאי על דרגות משותפות (היה מותר לציין את זה בתור עוד הבדל בתנאים).