פתרונות לתרגיל הראשון

הגעה מהוססת

עבור כל k, נחשב ראשית את תוחלת ההפרש $\mathrm{E}[T_k - T_{k-1}]$. זוהי התוחלת של מספר ההטלות של מטבע הוגנת עד שמתקבל "1", אשר כידוע שווה ל־2 (בתרגול ראיתם שיטה לחשב תוחלות כאלו לפי $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]$). עתה משתמשים בלינאריות התוחלת לחישוב התוחלת שלנו: $\mathrm{E}[T_k] = \mathrm{E}[T_{k-1}] + \mathrm{E}[T_k - T_{k-1}] = \mathrm{E}[T_k] + 2$. מכאן נובע (למשל באינדוקציה) שמתקיים $\mathrm{E}[T_k] = 2k$.

מספר בהגרלה

ברור מה קורה במקרה הקצה כאשר $q = 0$, אז מעתה נניח שמתקיים $q > 0$. נסמן ב־X את המ"מ המקבל את ערך המספר, וב־L את המ"מ המקבל את אורך המספר המתקבל. אם מתנים על $L = k$ עבור k קבוע כל שהוא, אז המספר הוא התוצאה של הגרלת מספר בן k ספרות בדיוק כשכל סיפרה היא 1 בהסתברות q ו־0 בהסתברות $1 - q$. על כן (לפי לינאריות התוחלת) לא קשה לראות שמתקיים $\mathrm{E}[X|L = k] = \sum_{j=0}^{k-1} q \cdot 2^j = q(2^k - 1)$ (בסכום האמצעי 2^j הוא החלק שהספרה ה־$(j+1)$ מימין תורמת למספר אם היא יוצאת 1, ואת זה מכפילים בסיכוי שהדבר יקרה).

הסיכוי שמתקיים $L = k$ הוא בדיוק $p(1-p)^k$. על כן מתקיים:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[X|L = k] \Pr[L = k] = \sum_{k=0}^{\infty} qp(1-p)^k (2^k - 1)$$

הטור הנ"ל מתכנס אם $p > \frac{1}{2}$ (איבריו יהיו חסומים ע"י α^k עבור $\alpha < 1$ מתאים), ומתבדר אם $p \leq \frac{1}{2}$ (איבריו יתכנסו ל־qp אם $p = \frac{1}{2}$ ויתכנסו ל־$+\infty$ עבור ערכים קטנים יותר).

לא כל הדרכים מובילות

נניח שלכל v מתקיים $\mathrm{E}[T_v] < n/4$, ונראה סתירה. לפי אי שוויון מרקוב מתקיים אז $\Pr[T_v \geq n/2] < \frac{1}{2}$, ז"א שבסיכוי גדול מ־$\frac{1}{2}$ הגענו לצומת v בפחות מ־$n/2$ צעדים. נסמן ב־I_v את משתנה האינדיקטור עבור המאורע הזה, וב־Y את המ"מ המקבל את מספר הצמתים השונים שביקרנו בהם בפחות מ־$n/2$ צעדים. מתקיים $Y = \sum_{v \in V} I_v$ כאשר V מסמן את קבוצת הצמתים של הגרף, ולכן $\mathrm{E}[Y] = \sum_{v \in V} \mathrm{E}[I_v] > n \cdot \frac{1}{2}$. זוהי סתירה לעובדה שערכו של Y לעולם אינו יכול לעלות על $n/2$ (גם אם כוללים את s), כי בכל צעד אנחנו לא מבקרים ביותר מצומת חדש אחד.

פתרונות לתרגיל השני

בידוד בלי ידיעה

אנחנו צריכים את הלמה הבאה: אם בהינתן $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\{1,\ldots,m\})$ מגרילים באופן מקרי ויוניפורמי פונקצית משקל w כך שלכל $i \in \{1,\ldots,m\}$ מתקיים $w(i) \in \{1,\ldots,n_i\}$ (סה"כ יש $\prod_{i=1}^m n_i$ אפשרויות ל־w), אז בהסתברות לפחות $1-\sum_{i=1}^m 1/n_i$ תהיה ב־$\mathcal{F}$ קבוצה יחידה בעלת משקל מינימלי.

האלגוריתם: כאשר מבקשים את המשקל של i, אם זו הפעם הראשונה ששואלים על i אז האלגוריתם מגריל באופן יוניפורמי וב"ת בהגרלות קודמות מספר $w(i)$ בין 1 ל־$5i^2$. אם זו לא הפעם הראשונה אז האלגוריתם פשוט אומר שוב את הערך שהוגרל עבור $w(i)$ בפעם הראשונה שנשאל על i.

האלגוריתם הזה בוודאי לא יתן תשובות גבוהות מ־$5m^2$ (אפילו שערך m אינו ידוע לאלגוריתם), והערכים שיתן יתאימו לפונקצית משקל מקרית יוניפורמית עם $n_i = 5i^2$. לפי הלמה הקודמת, הסיכוי שתהיה $F \in \mathcal{F}$ יחידה עם משקל מינימלי הוא לפחות $1-\sum_{i=1}^m 1/5i^2 > 1-\frac{1}{5}\sum_{i=1}^\infty 1/i^2 > \frac{1}{2}$, כנדרש.

דרך הוכחת הלמה: ההוכחה נעשית בדיוק איך שלמת הבידוד הוכחה בכיתה. ההבדל היחידי הוא כאשר חוסמים את הסיכוי למאורע הרע ש־i אינו איבר חד־משמעי:

$$\sum_{k=1}^{n_i} \Pr\big[w(i)=k \wedge W_i - V_i = k\big] = \sum_{k=1}^{n_i} \Pr\big[w(i)=k\big]\Pr\big[W_i-V_i=k\big] = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{n_i}\Pr\big[W_i-V_i=k\big] \leq \frac{1}{n_i}$$

מסכלי המשוואות

על מנת לפתור את השאלה מוכיחים קודם את הלמה הבאה: עבור k גדול מספיק (כפונקציה של p), וקבוצה B בת k איברים ב־$(\mathbb{Z}_p)^m$, קיימת משוואה לינארית אשר מקיימים אותה בין $2k/p$ ל־$k/2p$ איברים של B.

ההוכחה היא באמצעות מומנט שני: מגרילים את המשוואה (ז"א מגרילים את הווקטור $u \in (\mathbb{Z}_p)^m$ ואת הסקלר $b \in \mathbb{Z}_p$ לכתיבת $u \cdot v = b$) באופן יוניפורמי וב"ת. לכל $v \in B$ מגדירים את משתנה האינדיקטור X_v עבור המאורע ש־v פותר את המשוואה. כל המ"מ הנ"ל ב"ת תלויים בזוגות. תקציר ההוכחה: מניחים בלי הגבלת הכלליות עבור $v, w \in B$ שהקורדינטות הראשונות של הווקטורים שונות, $v_1 \neq w_1$. אז כותבים $\Pr[X_v \wedge X_w] = \Pr[(\sum_{i=2}^m v_i u_i = b - v_1 u_1) \wedge (\sum_{i=2}^m w_i u_i = b - w_1 u_1)]$, ומחשבים את זה בהתניות על ערכי $u_2,\ldots,u_m$, הב"ת בערכו של u_1 (יוצא ש־u_1 ו־b צריכים לספק מערכת לא מנוונת של שתי משוואות בשני נעלמים).

תוחלת הסכום $X = \sum_{i=1}^k X_i$ היא k/p, והשונות של X היא $k(1/p - 1/p^2) < k/p$ בגלל אי התלות בזוגות. על כן, לפי אי שוויון צ'בישף, בסיכוי חיובי X מקבל ערך בטווח $k/p \pm \sqrt{k/p}$, ולכן יש משוואה שמשיגה ערך כזה. אם $k > 4p$ (ואז $k/p > 2\sqrt{k/p}$), אז טווח זה נמצא בין $3k/2p < 2k/p$ לבין $k/2p$ כנדרש.

עם הלמה בידינו, ניגש לפיתרון השאלה: נדרוש ש־p יהיה לפחות $4/\delta$, ועבור n נדרוש שיהיה לפחות כפול מהחסם על k שהלמה דורשת. נתחיל מהקבוצה $A_0 = A$. בכל שלב i נבחר עבור A_i משוואה $u_i \cdot v = b_i$ כך שבין $2|A_i|/p$ לבין $|A_i|/2p$ מאברי A_i מקיימים אותה, ונגדיר את A_{i+1} להיות קבוצת האיברים שלא מקיימים את המשוואה.

אנו נעצור עם ה־i הקטן ביותר כך ש־$|A_i| \leq (\frac{1}{2}+\delta)|A|$. בפרט זה מבטיח שבכל ההפעלות של הלמה גודל הקבוצה היה גדול מספיק. כמו כן $|A_{i-1}| > (\frac{1}{2}+\delta)|A|$ וכן $|A_i| \geq (1-2/p)|A_{i-1}| \geq (1-\frac{1}{2}\delta)|A_{i-1}|$, ולכן $|A_i| \geq (1-\frac{1}{2}\delta)(\frac{1}{2}+\delta)|A| \geq (\frac{1}{2}-\delta)|A|$. זה אומר שלקבוצה שלנו (שהיא קבוצת האיברים שלא מקיימים את סדרת המשוואות עד כה) יש את הגודל הנכון (מניחים $\delta < \frac{1}{2}$, אחרת ממילא טענת השאלה נכונה באופן ריק).

על מנת לחסום את i, גודל סדרת המשוואות שקיבלנו, מכיוון שלכל j מתקיים $|A_{j+1}| \leq (1-1/2p)|A_j|$, מספר הצעדים שיקח לנו לעצור חסום ע"י $\log(|A|/(\frac{1}{2}+\delta)|A|)/\log(1/(1-1/2p)) = O(p)$.

פתרונות לתרגיל השלישי

מחפשים את הקשר

הערה: הפתרון הבעייתי שהורד מהאתר היה לפי "קל לראות" של מאמר מהזמן האחרון, אבל אח"כ התברר ששם הם מסתמכים על התוצאה הידועה מראש שבסיכוי $1-o(1)$ גרף מקרי כנ"ל יהיה קשיר.

ראשית נראה שבהסתברות $1-o(1)$, לכל קבוצה $U \subset V$, למעט הקבוצה הריקה ו־V עצמה, קיימת קשת בין U ל־$V \setminus U$. את זה אפשר להוכיח "בכח": עבור קבוצה U מגודל k, הסיכוי שלא תהיה לה קשת יוצאת חסום ע"י $(1-\frac{\alpha \ln n}{n})^{k(n-k)} \leq e^{-\alpha \ln(n)k(n-k)/n} = n^{-\alpha k(n-k)/n}$. יש לא יותר מ־$n^k$ קבוצות כאלו, ולכן עבור n גדול דיו אפשר לעשות חסם איחוד מאורעות לחסימת ההסתברות לקיום U ללא קשת יוצאת:

$$\sum_{k=1}^{n/2} n^k n^{-\alpha k(n-k)/n} \leq n^{(1-\alpha)(n-1)/n} + n^{(1-2\alpha)(n-2)/n} + \sum_{k=3}^{n/2} n^{-\alpha(k-2)/2} \leq o(1) + o(1) + 2n^{-\alpha/2} = o(1)$$

ננסח עתה אלגוריתם שינסה למצוא עץ פורש לגרף באופן דומה לאלגוריתם של פרים. באופן פורמלי, עבור צומת שרירותי $v \in V$ האלגוריתם יאתחל את הקבוצה $U = \{v\}$. אחר כך, בשלב ה־i, האלגוריתם ישאל זוגות של קשתות אפשריות בין U ל־$V \setminus U$, אבל רק כאלו שלא נשאלו בשלבים קודמים, עד אשר ימצא זוג צמתים $u \in U$ ו־$w \in V \setminus U$ המהווים קשת. בשלב זה האלגוריתם יוסיף את w ל־U וימשיך לשלב הבא. אם לא נמצאה קשת כזו, אז השלב ה־i וכן האלגוריתם כולו נכשלים. עם זאת, הראינו קודם שבהסתברות $1-o(1)$ לכל קבוצה U שאינה ריקה ואינה שווה ל־V יש קשת ממנה ל־$V \setminus U$, ובהינתן המאורע הנ"ל האלגוריתם לא יכשל לפני שביצע $n-1$ שלבים.

ברור שאם האלגוריתם הצליח לבצע $n-1$ שלבים אז הוא מצא קשתות המהוות עץ פורש בגרף שלנו (שהוא בפרט תת גרף קשיר). עוד דבר שצריך לשים לב הוא שאם נסמן את הזוגות שהאלגוריתם שאל עד נקודת זמן מסויימת ב־$\{u_1, w_1, \ldots, u_\ell, w_\ell\}$ (זה כולל זוגות שקיבלנו עליהם תשובות של "כן קשת" או "לא קשת"), אז מכיוון שכל זוג נבחר להיות קשת באופן ב"ת בזוגות הצמתים האחרים, המאורע עבור השאלה על הזוג $u_{\ell+1}, w_{\ell+1}$ שישאל עתה יהיה ב"ת גם בתיאור ריצת האלגוריתם עד עתה (שכן תיאור זה הוא פונקציה דטרמיניסטית של הגרלות הזוגות האחרים). במילים אחרות, בכל פעם שהאלגוריתם שואל על זוג האם הוא קשת התשובה תהיה "כן" בהסתברות הנתונה p בדיוק (כזכור, האלגוריתם נמנע מלשאול על זוגות של צמתים שנשאלו בעבר).

עתה נשים לב שהאלגוריתם מצליח לאחר קבלה של $n-1$ תשובות "כן" במדויק. לכן, לכל $\epsilon > 0$ ההסתברות שנעשו יותר מ־$(1+\epsilon)n/p$ שאילתות היא בדיוק ההסתברות שהסכום של $(1+\epsilon)n/p$ משתנים ב"ת המקבלים 1 בהסתברות p ו־0 בהסתברות $1-p$ הוא קטן מ־$n-1$ (לפי הדיון על אי תלות התשובות שהאלגוריתם מקבל). תוחלת הסכום הנ"ל היא $(1+\epsilon)n$, ואנחנו נשתמש בחסם הסטיות הגדולות השני שנלמד בשיעור לקבלת חסם של $e^{-2\epsilon^2 n^2/(1+\epsilon)n} = o(1)$ על ההסתברות, להשלמת ההוכחה (אחרי שמוסיפים לכך את ה־$o(1)$ של המאורע שהאלגוריתם נכשל).

זיווגים ומקריות

אם נסמן ב־X את גודל הזיווג המקסימלי בגרף המקרי שלנו, ראשית נגדיר $\alpha(n) = \mathrm{E}[X]/n$. את החסם הגלובלי התחתון על $\alpha(n)$ נוכיח בהמשך, וקודם נוכיח חסימה על הסטיה של גודל הזיווג המקסימלי.

הדבר נעשה באמצעות הגדרת מרטינגל חשיפת צמתים סטנדרטי לגבי גודל הזיווג המקסימלי. אם נסמן את צמתי הגרף ב־$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, נשים לב לשלשני גרפים G ו־H הנבדלים רק בשכנים של v_i בקרב $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ יהיו גדלי זיווג מקסימלי הנבדלים בלא יותר ב־1: אם למשל ל־G יש זיווג בעל k קשתות, אז ל־H יהיה לפחות זיווג בעל $k-1$ קשתות המתקבל מהסרת הקשת המכילה את v_i אם יש כזו בזיווג.

מכאן שמתקיים תנאי ליפשיץ עבור מרטינגל החשיפה (ז"א שתמיד $|X_i - X_{i-1}| \leq 1$), ולכן לפי משפט אזומה לכל $\lambda > 0$ מתקיים $\Pr[|X - n \cdot \alpha(n)| > \lambda\sqrt{n-1}] < 2e^{-\lambda^2/2}$. אצלינו לוקחים למשל $\lambda = n^{1/4}$ ומקבלים שבסיכוי $1 - o(1)$ מתקיים $|X - n \cdot \alpha(n)| = o(n)$.

לאור זאת, אם נוכיח שקיים $\alpha > 0$ עבורו $\alpha(n) > \alpha$ אז גם נקבל את החסם המתבקש ע"י השאלה על X. מספיק גם להוכיח זאת עבור n גדול דיו, אפשר אח"כ לקחת את המינימום של α עם כל ה־$\alpha(n)$ עבור המספר הסופי של ערכי n הקטנים מדי (די ברור שכל אלו גדולים מ־0).

לשם כך מספיק להראות קיומם של β ו־δ גדולים מ־0 כך שבהסתברות לפחות δ מתקיים $X > \beta \cdot n$. הסיבה לכך היא כי לאור מה שהוכחנו על הסטיה של X מהממוצע שלו, נובע מהקיום של אלו כי עבור n גדול דיו לא יתכן שמתקיים למשל $\alpha(n) < \beta/2$.

שיטה אחת לכך היא להגדיר את משתני האינדיקטור Z_i ו־w_i עבור $i \leq n/4$ באינדוקציה: בהינתן $w_1, \ldots, w_{i-1} \in V$, Z_i הוא משתנה האינדיקטור עבור המאורע שיש ל־v_i שכן מתוך צמתי הקבוצה $\{v_{n/2}, \ldots, v_n\} \setminus \{w_1, \ldots, w_{i-1}\}$. אם $Z_i = 1$ אז w_i יוגדר להיות השכן עם האינדקס המינימלי של v_i המקיים את תנאי המאורע, ואחרת נגדיר אותו שרירותית להיות v_1. ברור ש־$Z = \sum_{i=1}^{n/4} Z_i$ הוא חסם תחתון על גודל הזיווג המקסימלי (יש את הזיווג $\{v_i w_i : Z_i = 1\}$).

נשים לב שלכל $i \leq n/4$ מתקיים $\Pr[Z_i = 0] \leq (1 - \frac{1}{n})^{n/4} \leq \frac{9}{10}$. אפשר היה להמשיך לפי חסם סטיות גדולות אם מציינים שהחסם על ההסתברות עבור Z_i נכון גם אם מתנים על כל ערכי המ"מ הקודמים, אבל אפשר גם בשיטה יותר בסיסית: עבור $Z = \sum_{i=1}^{n/4} Z_i$ נובע מהחסם $\mathrm{E}[Z] \geq n/40$ (התעלמתי מסימני עיגול כאשר n לא מתחלק ב־4), ומצד שני Z לעולם לא יקבל ערכים גדולים מ־n, ולכן אפשר למשל לקבוע $\beta = \delta = 1/100$.

פתרונות לתרגיל הרביעי

פיצול גרף

נגריל את הקבוצה U ע"י כך שלכל $i \in \{1,\dots,n\}$ נבחר האם $v_i \in U$ או $v_{n+i} \in U$ באופן יוניפורמי וב"ת לכל האינדכסים. לצורך המשך ההוכחה לכל $v \in V$ נקרא לצומת השני בזוג (v_i, v_{n+i}) המתאים לו "בן הזוג של v" (יכול להיות ש־v הוא ה־v_i או ה־v_{n+i} שם).

לכל $v \in V$ נסמן ב־A_v את המאורע ה"רע" שמספר השכנים שלו בקבוצה שלו (שיכלה להיות U או $V \setminus U$) הוא יותר מ־$d/2 + 100\sqrt{d \log d}$ (כמובן שאין כאן נסיון לשפר את המקדם "100"). גודל קבוצת השכנים שלו בקבוצה שלו הוא סכום של לכל היותר d משתני אינדיקטור: אלו כוללים את כל השכנים של v למעט בן הזוג שלו (אם הוא גם שכן). אלו לא בהכרח ב"ת, כי יכול להיות שגם צומת u וגם בן הזוג שלו שכנים של v. עם זאת, מבין השכנים שהם בני זוג, בדיוק חצי מהם יהיו בקבוצה של v (בגלל שבני זוג תמיד מתחלקים בין שתי הקבוצות). כל משתני האינדיקטור האחרים הם ב"ת לחלוטין ונבחרים יוניפורמית מ־$\{0,1\}$.

מהניתוח למעלה אפשר להשתמש בחסם סטיות גדולות עבור חסימת ההסתברות ל־A_v. החסם הוא כזכור $e^{-a^2/2m}$ כאשר כאן $a = 100\sqrt{d \log d}$ ומתקיים $m \le d$, ובפרט מתקיים $\Pr[A_v] \le 1/100d^2$. כמו כן, A_v הוא ב"ת לחלוטין בכל המאורעות עבור צמתים שאין להם שכן משותף עם v, כי כל A_u הוא פונקציה של ההגרלות שנעשו עבור השכנים של u בלבד. מכיוון שדרגות הגרף חסומות ע"י d, בוודאי שיש פחות מ־d^2 צמתים עם שכנים משותף עם v (סופרים את מספר השכנים של השכנים של v), ולכן ניתן לסיים ע"י שימוש במקרה הסימטרי של הלמה הלוקלית.

הערה: השאלה הזו מבוססת על למה המשמשת במאמר The strong chromatic number of a graph מאת נוגה אלון. כדאי לקרוא אותו.

לא תרבו

ראשית, נסמן ב־$B = \{i : \Pr_\mu[i] \ge 1/\alpha n\}$ את קבוצת האינדקסים המתקבלים בהסתברות גבוהה מ־$1/\alpha n$. נשים לב קודם כל שמתקיים $|B| \le \alpha n$, פשוט כי סכום ההסתברויות לא יכול להיות גדול מ־1. על כן לפי הנתונים יש מילה $w \in C$ שמתאפסת על B. מכאן שבפרט $\Pr_\mu[i \in B] \le \frac{1}{10}$, אחרת לא יכול להיות שיתקיים $\Pr_\mu[w_i = 1] \ge \frac{9}{10}$ כפי שנתון.

עתה נסתכל על התהליך הבא: גם מגרילים את $w \in C$ באופן יוניפורמי מהקבוצה הנ"ל, וגם באופן ב"ת מגרילים את i לפי μ. נשים לב שמתקיים $\mathrm{H}[w] = \log |C|$ לפי הידוע על אנטרופיה של התפלגות יוניפורמית, וכן עדיין מתקיים $\Pr[w_i = 1] \ge \frac{9}{10}$. אי השוויון השני נכון ל־w המוגרל אקראית ע"י "מיצוע" של אי השוויון הנתון לכל $w \in C$ קבוע. על מנת לסיים נרצה לחסום את $\mathrm{H}[w]$ ודרכו את $|C|$.

נסמן עתה את קבוצת האינדכסים J שעבורם ההגרלה של w תתן ערך 1 בהסתברות לפחות $\frac{7}{10}$, ז"א $J = \{j : \Pr_\nu[w_j = 1] \ge \frac{7}{10}\}$, כאשר ν הוא המרחב של הגרלה יוניפורמית של $w \in C$. מתקיים $\Pr_\mu[i \in J] \ge \frac{2}{10}$, כי המאורע "$w_i = 1$" במרחב המשולב של ההגרלות מוכל באיחוד המאורע "$i \in J$" עם המאורע שמתקיים $w_i = 1$ כאשר i אינו ב־J (ולמאורע האחרון ההסתברות בוודאי חסומה ע"י $\frac{7}{10}$).

בפרט, ע"פ הכלל על איחוד מאורעות, חייב להתקיים $\Pr_\mu[i \in J \setminus B] \ge \frac{1}{10}$. מכיוון שבקבוצה הנ"ל אין איברים עם הסתברות גבוהה מ־$1/\alpha n$ (לפי הגדרת B), מתקיים $|J| \ge |J \setminus B| \ge \alpha n/10$. לפי סאב־אדיטיביות של אנטרופיה אנחנו יודעים שמתקיים $\mathrm{H}[w] = \mathrm{H}[w_1,\dots,w_n] \le \sum_{i=1}^n \mathrm{H}[w_i]$. לבסוף, נשים לב שעבור כל i מתקיים $\mathrm{H}[w_i] \le 1$, בעוד שעבור $i \in J$ מתקיים $\mathrm{H}[w_i] \le H(\frac{7}{10}) < 1$ (הביטוי באמצע הוא פונקצית האנטרופיה המספרית שהוגדרה בשיעור). על כן נסמן $\beta = \alpha(1 - H(7/10))/10 > 0$, ונקבל $\log |C| = \mathrm{H}[w] \le \sum_{i=1}^n \mathrm{H}[w_i] \le (1-\beta)n$. העברת שני האגפים לחזקה של 2 תשלים את ההוכחה.

זמני פגיעה וביקור

הגרף שלנו יהיה המעגל בעל חמישה צמתים, כאשר צומת ההתחלה s וצומת הסיום t יהיו במרחק 2 זה מזה. לפי הקשר לרשתות חשמליות, חישוב ישיר של זמן הביקור יתן $k_{st} = 10/(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = 12$, ומכיוון שיש איזומורפיזם המחליף בין s ל־t זמן הפגיעה יהיה בדיוק חצי מזה, ז"א 6. תת הגרף המושרה יהיה זה המתקבל לאחר הסרת הצומת הנמצא בין s ל־t, שהוא מסלול בעל שלוש קשתות. זמן הפגיעה של זה מופיע בחוברת הקורס, והוא 9.

הילוך לשום־מקום

הוכחה על סמך הגדרות: נסמן את הזמן הממוצע להגעה מ־1 ל־0 ב־h, ונניח שזהו ערך סופי. נשים לב שגם זמן ההגעה הממוצע מ־2 ל־1 שווה ל־h, מכיוון ש"לחסר 1" הוא איזומורפיזם של הגרף האינסופי הנתון. כמו כן זמן ההגעה הממוצע מ־2 ל־0 שווה ל־$2h$. הסיבה: זהו סכום של שני מ"מ, הראשון קובע את זמן ההגעה בפעם הראשונה ל־1, והשני את זמן ההגעה משם ל־0 (ולפי תכונת חוסר הזיכרון של הילוך מקרי, המשתנה השני מתפלג כמו זמן הגעה רגיל מ־1 ל־0). התוחלת של הסכום שווה אז לסכום התוחלות.

ננתח מה קורה בצעד הראשון: בהסתברות $\frac{1}{2}$ יהיה צעד מ־1 ל־0, ז"א שיהיה זמן הגעה של צעד אחד בדיוק. בהסתברות $\frac{1}{2}$ יהיה צעד מ־1 ל־2, ואז זמן ההגעה הממוצע יהיה 1 (עבור הצעד שנעשה) ועוד זמן ההגעה הממוצע מ־2 ל־0.

בסופו של דבר קיבלנו את המשוואה $h = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+2h) = h+1$, וכמובן שאין למשוואה הזו פיתרון שהוא מספר סופי.

הוכחה אלטרנטיבית: בחוברת מתוארת שיטה לחישוב זמני ביקור בהילוכים מקריים על גרפים מסויימים (באמצעות הקשר להתנגדות חשמלית). בפרט, אם נסמן ב־a_k את זמן הביקור (הילוך הלוך ושוב) בין 0 ו־1 בגרף שהוא מסלול בודד עם $k+1$ צמתים, אז זה יהיה שווה ל־$2k$. זמן הביקור בין 1 ל־0 בגרף האינסופי שלנו שווה ל־$2h$ (שוב בגלל שיקול של איזומורפיזם), והוא חסום מלמטה ע"י a_k לכל k (לא קשה להראות עבור הגרף המסויים הזה, מושאר כתרגיל לקוראים). מכאן שלכל k מתקיים $h \geq k$, ז"א ש־h אינו סופי.