פתרונות לתרגיל ראשון

הוכחה של דבר ברור

סקיצה (גרסא עם התפלגויות סופיות בלבד): נבחר את R לפי μ_p, את S לפי $\mu_{(q-p)/(1-p)}$, ונגדיר את $T = R \cup S$. דבר ראשון מראים ש־T מתפלג (כשמחשבים התפלגות לא מותנה ב־R או S) בדיוק לפי μ_q ולכן $\Pr[T \in \mathcal{A}] = \Pr_{R \sim \mu_q}[R \in \mathcal{A}]$. המאורע $T \in \mathcal{A}$ מכיל את המאורע $R \in \mathcal{A}$ ולכן מתקיים $\Pr_{\mu_p}[R \in \mathcal{A}] < \Pr_{\mu_q}[R \in \mathcal{A}]$. לאי שוויון חד נשים לב שבהסתברות חיובית מתקיים $(T \in \mathcal{A}) \wedge \neg(R \in \mathcal{A})$, כי בפרט בהסתברות $(q-p)^n > 0$ גם $R = \emptyset$ (וזה אינו ב־$\mathcal{A}$ כי הוא מונוטוני ולא שווה לקבוצת החזקה) וגם $T = \{1, \ldots, n\}$ (וזה ב־$\mathcal{A}$ כי הוא מונוטוני ולא ריק).

פרמוטציה בהגרלה

מסמנים ב־E_0 את המאורע ש־$\{1, \ldots, k, n-k+1, \ldots, n\}$ ממופים טוב (ז"א שלכל i בתחום זה $|i-\sigma(i)| \geq k$), וב־E_i את המאורע שהאיבר $k+i$ ממופה טוב. נרצה אם כן לחסום מלמטה את $\Pr[\bigwedge_{i=0}^{n-2k} E_i]$. בשימוש סדרתי בחוק Bayes זה יהיה שווה ל־$\prod_{j=0}^{n-2k} \Pr[E_j | \bigwedge_{i=j+1}^{n-2k} E_i]$.

ראשית נשים לב ש־$\Pr[E_0 | \bigwedge_1^{n-2k} E_i] \geq 1/(2k)!$ (כל מה שחשוב שזה קבוע גדול מאפס), מכיוון שלכל סדרת ערכים נתונים של $\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n-k)$ אפשר לתת ל־$\sigma(1), \ldots, \sigma(k)$ את k הערכים ה"פנויים" העליונים (לפי סדרם) ול־$\sigma(n-k+1), \ldots, \sigma(n)$ את k הערכים הפנויים התחתונים, ואלו יקיימו $|i - \sigma(i)| \geq k$.

עתה נחסום את $\Pr[E_j | \bigwedge_{i=j+1}^{n-2k} E_i]$ עבור $j > 0$ כל שהוא: בהינתן סידרת ערכים כל שהיא עבור $\sigma(k+j+1), \ldots, \sigma(n-k)$, הבחירה המותנה עליהם של $\sigma(k+j)$ תהיה מתוך $2k+j$ אפשרויות נותרות. לא יותר מ־$2k-1$ מהן יהיו "רעות" (ז"א בתחום בין $j+1$ לבין $2k+j-1$). על כן $\Pr[E_j | \bigwedge_{i=j+1}^{n-2k} E_i] \geq 1 - \frac{2k-1}{2k+j} > e^{-4k/2k+j}$ (אפשר לבדוק את אי השוויון הגס $1 - x < e^{-2x}$ בתחום $[0,1]$ ע"י גזירה; בחדוו"א לומדים אי שוויון עדין יותר).

עתה אפשר לחסום את הכל

$$\prod_{j=0}^{n-2k} \Pr[E_j | \bigwedge_{i=j+1}^{n-2k} E_i] \geq (2k!)^{-1} \prod_{j=0}^{n-2k} \Pr[E_j | \bigwedge_{i=j+1}^{n-2k} E_i] \geq (2k!)^{-1} e^{-4k \sum_{j=1}^{n-2k} \frac{1}{2k+j}} \geq (2k!)^{-1} e^{-4k \ln(n)}$$

החסם האחרון הוא ע"י $\sum_{l=2}^{n} \frac{1}{l} \leq \ln(n)$ (אפשר להוכיח זאת ע"י השוואה עם האינטגרל המתאים). לביטוי הסופי יש את הצורה המבוקשת עם $c_k = (2k!)^{-1}$.

טורניר עד הסוף

נביט בכל הזוגות u, vונבחר באקראי ובאופן יוניפורמי להכליל בטורניר את הקשת (u, v) או (u, v). נביט בסידור כלשהו של הצמתים בגרף $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. סידור זה יהווה מסלול אם לכל $1 \leq i < n$, יתקיים כי $(v_i, v_{i+1}) \in E$. נשים לב כי ההגרלות עבור כל הזוגות המעורבים בסידור צמתים זה בלתי תלויות זו בזו, ולכן ההסתברות כי סידור נתון הוא מסלול היא 2^{1-n}. מכיוון שישנם $n!$ סידורים של צמתי הגרף, מלינאריות התוחלת נקבל כי תוחלת מספר המסלולים המכוונים מאורך n היא $n!2^{1-n}$. מכאן קיים טורניור בו לפחות מספר זה של מסלולים מכוונים מאורך n.

פתרונות לתרגיל שני

אחרון חביב

מסתבר שניתן להראות באופן ישיר ש־$|A_{\lfloor \log n \rfloor}| = 1$ מתקיים בהסתברות עם חסם תחתון קבוע. נראה כאן פתרון מסובך יותר שיכול לעבוד גם עבור מספר מרחבי הסתברות אחרים לבחירת $A_{i+1} \subseteq A_i$.

ראשית נגדיר מספר משתנים מקריים. נסמן ב־J את המ"מ המקבל את אינדקס j הנמוך ביותר עבורו $|A_j| \leq 1$. כמו כן נסמן לכל $i > 1$ ב־X_i את משתנה האינדיקטור שמקבל 1 אם $i = J$ וכן $|A_i| = 1$, ומקבל 0 אחרת (לפי הנתונים אין טעם להגדיר את "X_1", הוא תמיד יהיה 0). המאורע שקיים j עבורו A_j בעלת איבר אחד בדיוק זהה למאורע $\sum_{i=2}^{\infty} X_i = 1$, ואחרת מתקיים $\sum_{i=2}^{\infty} X_i = 0$. על כן להוכחת הנדרש עלינו לחסום מלמטה את $\mathrm{E}[\sum_{i=2}^{\infty} X_i]$.

נחשב עתה מספר תוחלות מותנות. לכל $j \neq i$ ברור שמתקיים $\mathrm{E}[X_i | J = j] = 0$ כי X_i תמיד יקבל 0 אם $i \neq J$. עתה נחסום את $\mathrm{E}[X_i | J = i]$. לכל $k > 1$ מתקיים $\Pr[|A_i| = 0 \,|\, |A_{i-1}| = k] = 2^{-k}$. כמו כן $\Pr[|A_i| = 1 \,|\, |A_{i-1} = k] = k2^{-k}$ ולכן $\Pr[J = i \,|\, |A_{i-1} = k] = \Pr[|A_i| \leq 1 \,|\, |A_{i-1} = k] = (k{+}1)2^{-k}$. על כן לפי חוק Bayes מתקיים $\Pr[|A_i| = 1 | J = i \wedge A_{i-1} = k] = k/(k+1) \geq \frac{2}{3}$ ולפי נוסחת ההתפלגות השלמה

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_i | J = i] = \Pr[|A_i| = 1 | J = i] &= \sum_{k=2}^{n} \Pr[|A_i| = 1 | J = i \wedge |A_{i-1}| = k] \cdot \Pr[|A_{i-1}| = k | J = i] \\
&\geq \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \Pr[|A_{i-1}| = k | J = i] = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

מכל אלו עתה ניתן לחסום לפי נוסחת התוחלת השלמה:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\sum_{i=2}^{\infty} X_i] &= \sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{E}\left[\sum_{i=2}^{\infty} X_i \middle| J = j \right] \cdot \Pr[J = j] \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \mathrm{E}[X_i | J = j] \cdot \Pr[J = j] \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{E}[X_j | J = j] \cdot \Pr[J = j] \geq \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \Pr[J = j] = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

העיקר האיזון

העיקרון פשוט: מגרילים באופן יוניפורמי הצבה ל־$x_1, \ldots, x_{2n}$ מבין ההצבות עם בדיוק n ערכי 1, ומראים שכל פסוקית תסתפק בהסתברות לפחות $\frac{7}{8} - \epsilon$. קיום ההצבה הנדרשת ינבע אז מלינאריות התוחלת בדיוק כפי שעשינו בכתה.

עבור פסוקית שבה לכל המשתנים אותו סימן (ז"א עם אפס או שלוש שלילות) ההסתברות לאי הסתפקות היא $\binom{2n-3}{n} / \binom{2n}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{1}{8} + o(1)$. עבור פסוקית עם סימן אחד שונה מהשניים האחרים ההסתברות לאי הסתפקות היא $\binom{2n-3}{n-1} / \binom{2n}{n} = \frac{n^2(n-1)}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{1}{8} + o(1)$. בשני המקרים עבור N_ϵ מתאים ו־$n > N_\epsilon$ ההסתברות תהיה קטנה מ־$\frac{7}{8} + \epsilon$ כנדרש.

פתרונות לתרגיל השלישי

אינטרסים מנוגדים – הגרסה המוקטנת (פתרון הגרסה המלאה יינתן עם זה של התרגיל הרביעי)

לפני הכל נשים לב שאם $m' > 0$ (ואחרת אין הרבה מה להוכיח) אז $m' \geq \frac{1}{3}n$. כמו כן נניח שמתקיים $\epsilon \leq \frac{1}{10}$ (אחרת ניקח את הערך $\frac{1}{10}$ במקום). אנו נגריל הצבה למשתנים $x_1, \ldots, x_n$ באופן יוניפורמי וב"ת, ופשוט נראה שבהסתברות חיובית (עבור n גדול דיו) זו תהיה ההצבה המבוקשת.

מהטיעון המוכר של לינאריות התוחלת, תוחלת מספר הפסוקיות המסתפקות מ־$C_1, \ldots, C_m$ היא $\frac{7}{8}m$, ובהתחשב בכך שמספר הפסוקיות המסופקות לעולם אינו עולה על m, נובע מכך שבהסתברות לפחות ϵ ההצבה שנבחרה תספק לפחות $(\frac{7}{8} - \epsilon)m$ מהפסוקיות $C_1, \ldots, C_m$.

עתה נפנה לנתח את מספר הפסוקיות המסתפקות מ־$C'_1, \ldots, C'_{m'}$. תוחלת מספר הפסוקיות המסתפקות כאן היא $\frac{7}{8}m'$, וניגש אם כן לחשב את השונות. נסמן ב־X_i את מ"מ האינדיקטור עבור כך ש־C'_i מסתפקת. מהנתון על מפוזרות היטב, ל־C'_i יש משתנים משותפים עם לא יותר מ־$9m'/n$ פסוקיות מ־$C'_1, \ldots, C'_{m'}$ (כולל C'_i עצמה). אם ל־C'_i ו־C'_j אין משתנים משותפים אז X_i ו־X_j הם ב"ת, ואם יש כאלו אז באופן הגס ביותר $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] \leq 1$ (כי המשתנים עצמם מקבלים ערכים ב־$\{0,1\}$). זאת בנוסף לחסם הברור $m' \leq 8\binom{n}{3}$ מאפשר לנו לחסום את השונות של $X = \sum_{i=1}^{m'} X_i$ ע"י $\sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{m'} \mathrm{Cov}[X_i, X_j] \leq \frac{9m'^2}{n} < 10m'^{5/3}$. בזאת ממשפט צ'בישף ניתן לחסום את ההסתברות $\Pr[X \leq (\frac{7}{8} - \epsilon)m'] \leq \Pr[|X - \mathrm{E}[X]| \geq \epsilon m'] = o(1)$.

לסכום, ההסתברות למאורע שלא מספיק פסוקיות מ־$C_1, \ldots, C_m$ מסתפקות היא לא יותר מ־$1 - \epsilon$, בעוד שהסתברות המאורע שלא מספיק פסוקיות מ־$C'_1, \ldots, C'_{m'}$ מסתפקות, עבור n גדול דיו, תהיה קטנה ממש מ־ϵ. על כן בהסתברות חיובית אף אחד מהמאורעות ה"רעים" לא יקרה ולכן תהיה בידינו ההצבה המבוקשת.

מעגלים זרים

נניח שמתקיים $k > 4$ (ממילא מבוקש כאן חסם אסימפטוטי). עבור $l = \lceil k/6\ln k \rceil$, ראשית ניקח שרירותית l צמתים ונצבע כל אחד מהם באחד מ־$\{1, \ldots, l\}$. עבור שאר הצמתים, נבחר לכל צומת צבע בקבוצה $\{1, 2, \ldots, l\}$ באופן יוניפורמי וב"ת בצמתים האחרים. נביט בתת הגרף המושרה על קבוצת הצמתים בצבע i. נאמר כי קבוצה זו היא "טובה" אם דרגת היציאה של כל צומת היא חיובית. נשים לב כי אם קבוצת צמתים היא טובה (ולא ריקה, כפי שדאגנו ע"י l הצמתים שנצבעו מראש), אז היא מכילה מעגל מכוון. לכן, די להראות כי קיימת הסתברות חיובית שכל קבוצות הצמתים טובות.

נביט בצומת v שצבעו i (בין אם הוא נצבע מראש ובין אם הוא נצבע אקראית). דרגת היציאה של הצומת בתת הגרף המושרה תהיה חיובית אם לפחות אחד מ־k הצמתים אליו יש לו קשת יצבע גם בצבע i. מכיוון שצמתים אלה נצבעים באופן ב"ת פרט ללא יותר מ־l מהם (ומתקיים $l < k/2$), ההסתברות שדרגת היציאה של v תהיה 0 חסומה ע"י $\left(1 - \frac{6\ln k}{k}\right)^{k-l} < \exp(-3\ln k) = k^{-3}$. המאורעות הללו עבור צמתים שונים u ו־v יהיו בלתי תלויים אם לא קיים צומת w כך שקיימות בגרף הקשתות $(u,w), (v,w)$. מההנחה על הדרגות, כל צומת יהיה תלוי במאורעות של $k(k-1)$ צמתים אחרים לכל היותר: לכל u יש לא יותר מ־k אפשרויות עבור w, ול־w יש (עקב דרגת הכניסה שלו) לא יותר מ־$k-1$ אפשרויות עבור v פרט ל־u עצמו. מכיוון ש־$ek^{-3}\left(k^2 - k + 1\right) \leq 1$, נובע מהלמה הלוקלית כי בהסתברות חיובית כל הצמתים יהיו בעלי דרגת יציאה חיובית בתת הגרף המושרה בו ימצאו, ומכיוון שהבטחנו שבכל קבוצות הצביעה יהיו צמתים (ע"י אלו שנצבעו מראש), נובע מכך שכל קבוצות הצביעה הן טובות. בזאת קיבלנו את המבוקש.

קבוצות ב"ת וסדר לקסיקוגרפי

הפתרון יינתן עם זה של התרגיל הרביעי, כי יש אפשרות להגיש את השאלה הזו עם הדרכה וניקוד מופחת.

פתרונות לתרגיל הרביעי

אינטרסים מנוגדים – השלמה לגרסה המלאה

גם כאן תוגרל הצבה עבור $x_1,\dots,x_n$, אולם בניגוד לפתרון של הגרסה המוקטנת, כל משתנה x_i יקבל באופן ב"ת את הערך 1 בהסתברות $\frac{1}{2}+\frac{\epsilon\delta}{10}$ ואת הערך 0 בהסתברות $\frac{1}{2}-\frac{\epsilon\delta}{10}$. גם כאן נראה שבהסתברות חיובית (עבור n גדול דיו) זאת תהיה ההצבה המבוקשת.

עבור C_i נסמן ב־s_i את מספר הליטרלים החיוביים (ללא סימן שלילה). הסיכוי של C_i להסתפק הוא:

$$
\begin{aligned}
1-(\frac{1}{2}-\frac{\epsilon\delta}{10})^{s_i}(\frac{1}{2}+\frac{\epsilon\delta}{10})^{3-s_i} &> \frac{7}{8}+\frac{\epsilon\delta-\epsilon^2\delta^2}{40}s_i-\frac{\epsilon\delta+\epsilon^2\delta^2}{40}(3-s_i)\\
&> \frac{7}{8}+\frac{\epsilon\delta}{40(1+\delta)}s_i-\frac{\epsilon\delta}{40(1-\delta)}(3-s_i)
\end{aligned}
$$

מלינאריות התוחלת, תוחלת מספר הפסוקיות המסתפקות מ־$C_1,\dots,C_m$ היא לפחות:

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{8}m+\frac{\epsilon\delta}{40(1+\delta)}\sum_{i=1}^m s_i-\frac{\epsilon\delta}{40(1-\delta)}(3m-\sum_{i=1}^m s_i) &\geq \frac{7}{8}m+\frac{\epsilon\delta}{40(1+\delta)}(\frac{3}{2}+\delta)m-\frac{\epsilon\delta}{40(1-\delta)}(\frac{3}{2}-\delta)m\\
&= \frac{7}{8}m+\frac{\epsilon\delta}{80(1+\delta)}m+\frac{\epsilon\delta}{80(1-\delta)}m>(\frac{7}{8}+\frac{\epsilon\delta}{40})m
\end{aligned}
$$

בהתחשב בכך שמספר הפסוקיות המסופקות לעולם אינו עולה על m, נובע מחסם התוחלת שבהסתברות לפחות $\frac{\epsilon\delta}{40}$ ההצבה שנבחרה תספק לפחות $\frac{7}{8}m$ מהפסוקיות $C_1,\dots,C_m$.

עתה נפנה לנתח את מספר הפסוקיות המסתפקות מ־$C'_1,\dots,C'_{m'}$. אפילו קירוב גס ביותר יראה שתוחלת מספר הפסוקיות המסתפקות כאן היא לפחות $(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\epsilon)m'$. ניתוח השונות כאן זהה לזה של פתרון הגרסה המוקטנת של השאלה, והוא חסום ע"י $10m'^{5/3}$. על כן ממשפט צ'בישף ניתן לחסום את ההסתברות $\Pr[X\leq(\frac{7}{8}-\epsilon)m']\leq\Pr[|X-\mathrm{E}[X]|\geq\frac{1}{2}\epsilon m']=o(1)$.

סיום הפתרון (לפי חסם על איחוד שני המאורעות ה"רעים") זהה לזה של הפתרון המוקטן.

קבוצות ב"ת וסדר לקסיקוגרפי

נראה שמתקיים $\Pr[\,|\,|L|-\mathrm{E}[|L|]\,|>\lambda\sqrt{n}]<2e^{-\lambda^2/2}$. לשם כך נבנה את מרטינגל חשיפת הצמתים של $|L|$ תחת ההתפלגות $G(n,p)$. נסמנו $X_1,\dots,X_n$. במקרה הזה המשפט הנוח מהכיתה לא יעבוד, צריך להוכיח שהמרטינגל מקיים את תנאי ליפשיץ ישירות. נסמן ב־L_i את $L\cap\{1,\dots,i\}$. נשים לב ש־L מתקבל למעשה מהפעלת האלגוריתם החמדן על לקיחת קבוצת צמתים ב"ת המופעל לפי סדר התוויות של הצמתים. לכן L_i תלוי אך ורק בת"ג המושרה על $\{1,\dots,i\}$ (הוא למעשה הקבוצה הב"ת האחרונה בת"ג זה). כמו כן, X_i תלוי אך ורק ב־$|L_i|$ (וב־i עצמו).

נסמן אם כן ב־$X_i(l)$ את הפונקציה הנותנת את ערך X_i הנקבע במקרה $|L_i|=l$, וננתח את הפונקציות הנ"ל. שינוי סדר הסכימה מראה שכל מ"מ Z המקבל מספרים טבעיים בלבד מקיים $\mathrm{E}[Z]=\sum_{k=1}^{\infty}\Pr[Z\geq k]$. עבור ניתוח $X_i(l)$ נתעניין אם כן בערכים $\Pr\big[|L|\geq k\,\big|\,|L_i|=l\big]$ עבור $k\geq l$. לשם הנוחות נגדיר את $q=1-p$. נשים לב שאם $i<n$ אז מתקיים (מאלגברה של מאורעות וחישוב ישיר של ההסתברויות לגודל $L=L_n$ בהינתן גודל L_{n-1}):

$$\begin{aligned}\Pr\big[|L| \geq k \,\big|\, |L_i| = l\big] &= \Pr\big[|L_{n-1}| \geq k \,\big|\, |L_i| = l\big] + q^{k-1}\Pr\big[|L_{n-1}| = k-1 \,\big|\, |L_i| = l\big] \\ &= (1-q^{k-1})\Pr\big[|L_{n-1}| \geq k \,\big|\, |L_i| = l\big] + q^{k-1}\Pr\big[|L_{n-1}| \geq k-1 \,\big|\, |L_i| = l\big]\end{aligned}$$

מזאת נובע ע"י אינדוקציה על n (עם בסיס $n = i$) ש־$\Pr[|L| \geq k \,|\, |L_i| = l] \leq \Pr[|L| \geq k \,|\, |L_i| = l+1]$, ולכן $X_i(l) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\big[|L| \geq k \,\big|\, |L_i| = l\big] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\big[|L| \geq k \,\big|\, |L_i| = l+1\big] = X_i(l+1)$.

באמצעות השוויון למעלה ניתן להראות גם ש־$\Pr[|L| \geq k \,|\, |L_i| = l] \geq \Pr[|L| \geq k+1 \,|\, |L_i| = l+1]$: במקרה $n = i$ יש שוויון (גם אם k לא גדול מ־l), ובצעד האינדוקציה משתמשים גם בזה שהמאורע "$|L_{n-1}| \geq k+1$" מוכל במאורע "$|L_{n-1}| \geq k$". נובע מכך:

$$\begin{aligned}X_i(l+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\big[|L| \geq k \,\big|\, |L_i| = l+1\big] \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\big[|L| \geq k+1 \,\big|\, |L_i| = l+1\big] \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\big[|L| \geq k \,\big|\, |L_i| = l\big] = X_i(l) + 1\end{aligned}$$

לבסוף, מתכונות מרטינגל החשיפה הנ"ל מתקיים $X_i(l) = (1-q^l)X_{i+1}(l) + q^l X_{i+1}(l+1)$. מכיוון ש־$X_i$ (לכל l אפשרי $|L_i| = l$) הוא "ממוצע משוקלל" של שני ערכים אפשריים מתאימים של X_{i+1}, ואלו נבדלים בלא יותר מ־1, תמיד יתקיים $|X_i - X_{i+1}| \leq 1$. עתה ניתן להפעיל את משפט אזומה ולקבל $\Pr[\,||L| - \mathrm{E}[|L|]\,| \geq \lambda\sqrt{n}] \leq 2e^{-\lambda^2/2}$.

עוד משהו על קבוצה ב"ת וסדר לקסיקוגרפי

עבור הגרף המתקבל G והקבוצה הב"ת המתאימה (האחרונה בסדר לקסיקוגרפי) L, נסמן ב־L_i את קבוצת i האיברים הראשונים (לפי סדר צמתי הגרף) ב־L, כאשר עבור $i \geq |L|$ פשוט $L_i = L$. בפרט תמיד מתקיים $L_1 = \{1\}$. נסמן ב־A_i את קבוצת צמתי הגרף אשר גדולים מ־$\max L_i$ (ז"א שבאים אחרי כל צמתי L_i בסדר הצמתים של הגרף) ואינם שכנים של אף אחד מצמתי L_i. שימו לב שבפרט ע"פ הגדרת האלגוריתם החמדן (שהוא זה המגדיר את L), L_{i+1} יהיה זהה בדיוק ל־$L_i \cup \{\min A_i\}$ אם $A_i \neq \emptyset$, וכן תמיד יתקיים $L \setminus L_i \subseteq A_i$ מכיוון ש־L היא קבוצה ב"ת.

אנו נתעניין במשתנים המקריים $X_i = |A_i|$ (זה אינו מרטינגל). נשים לב שבכל התניה שהיא על זהות A_i (שהיא פונקציה של זהות כל קשתות הגרף שלפחות אחד מצמתיהן הוא $\max L_i$ או נמצא לפניו), הקבוצה A_{i+1} תהיה תת קבוצה מקרית ויוניפורמית של $A_i \setminus \min A_i$ (הקבוצה תהיה תלויה אך ורק בזהות A_i ובקשתות מ־$\min A_i$ לצמתים שנמצאים אחרי $\min A_i$, ואלו מוגרלות באופן ב"ת בקשתות הגרף שקבעו את A_i).

עתה, לפי חסימת סטיות גדולות, בהינתן ϵ קיים C כך שאם $X_i = |A_i| \geq C$ אז בהסתברות לפחות $1 - \epsilon/X_i^2$ יתקיים ש־$X_{i+1} \geq X_i/3$ – למעשה $\Pr[X_{i+1} < X_i/3] \leq e^{-\Theta(X_i)}$ לפי החסם הקלאסי על סכום של $X_i - 1$ מ"מ ב"ת המוגרלים יוניפורמית מ־$\{-1, 1\}$, כך שלא קשה למצוא C מתאים.

אם כך, אז עבור $n > C^2$ יתקיים בהסתברות לפחות $1 - \epsilon$ שלכל X_i המקיים $X_i > \sqrt{n}$ יתקיים $X_{i+1} > X_i/3$ מאיחוד מאורעות (שימו לב שה־X_i הם סדרה מונוטונית יורדת ממש ו־$X_1 < n$ תמיד, כך שהמדובר באיחוד של פחות מ־n מאורעות). כאשר זה מתקיים אז בפרט יתקיים עבור $k = \lfloor \log_3(\sqrt{n}) \rfloor = \Omega(\log n)$ החסם $X_k \geq \sqrt{n} > 0$, ולכן גודל L יהיה לפחות k.

זה הוכח עבור כל ϵ ו־n גדול דיו (כאשר k אינו תלוי ב־ϵ), ולכן הדבר מתקיים בהסתברות $1 - o(1)$. שימו לב שעם רק קצת יותר עבודה היה אפשר להראות חסם תחתון של $(1 - o(1))\log_2 n$ על גודל L.

הטלות מישוריות

זהו ישום די מיידי של אי השוויון של שירר מהתרגול. נגריל באופן מקרי ויוניפורמי איבר $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in A$, ונגדיר את המ"מ X, Y, Z להיות הקורדינטות המתאימות של a (ז"א ש־Xיקבל את α וכו'). עתה מפתחים לפי אי שוויון שירר והחסם העליון על האנטרופיה לפי מספר הערכים האפשרי.

$$2\mathrm{H}[X,Y,Z] \leq \mathrm{H}[X,Y] + \mathrm{H}[X,Z] + \mathrm{H}[Y,Z] \leq \log n_z + \log n_y + \log n_x$$

כל שנותר לעשות עתה הוא להציב את $\mathrm{H}[X,Y,Z] = \log n$ (בגלל ששלושת המשתנים יחדיו מאפיינים את הווקטור שנבחר באופן יוניפורמי מ־n אפשרויות), ולהעביר אגפים לקבלת המבוקש.

צעידה על הקוביה

נשתמש בשיטת הצימוד. נגדיר מרחב הסתברות על שני הילוכים $X_0, X_1, \ldots$ ו־$Y_0, Y_1, \ldots$ ונדאג שיתקיימו הדברים הבאים: ההתפלגות של $X_0, X_1, \ldots$ (לא מותנה בזו של ה־Y_i) זהה לזו של ההילוך המקרי שלנו, וההתפלגות של $Y_0, Y_1, \ldots$ (לא מותנה בזו של ה־X_i) היא עם אותה מטריצת מעבר של ההילוך שלנו, רק ש־Y_0 מפולג יוניפורמית. נדאג גם שעבור $k = O(n \log n)$ יתקיים $\Pr[X_k = Y_k] = 1 - o(1)$, על מנת שההוכחה תושלם.

נגריל את ערכי המשתנים המקריים שלנו באינדוקציה. X_0 יהיה בהסתברות 1 הווקטור 0^n, ו־Y_0 יהיה איבר מקרי יוניפורמי של $\{0,1\}^n$ (זכרו שזוהי ההתפלגות הסטציונרית עבור הסתברויות המעבר של ההילוך שלנו).

בהינתן $X_0, \ldots, X_i$ ו־$Y_0, \ldots, Y_i$, נגריל את X_{i+1} ו־Y_{i+1} באופן הבא: ראשית נגריל את X_{i+1} בדיוק לפי מטריצת המעבר של ההילוך המקרי המקורי, ז"א שבהסתברות $\frac{1}{n+1}$ יתקיים $X_{i+1} = X_i$, ובהסתברות $\frac{n}{n+1}$ מגרילים קורדינטה מקרית באופן יוניפורמי ומקבלים את X_{i+1} ע"י הפיכת הערך של X_i בקורדינטה הזו. עבור הגרלת Y_{i+1}, נחלק למקרים:

- אם $X_i = Y_i$ אז $Y_{i+1} = X_{i+1}$. שימו לב שבפרט במקרה זה ההתפלגות של Y_{i+1} בהינתן $Y_0, \ldots, Y_i$ (לא מותנה על X_{i+1}) תלויה רק ב־Y_i ומצייתת למטריצת המעבר.
- אם X_i ו־Y_i נבדלים בקורדינטה אחת בדיוק, שנסמנה j, אז Y_{i+1} יוגדר בצורה הבאה: אם $X_i = X_{i+1}$ אז $Y_i = X_{i+1}$ (ז"א שאז הופכים את הקורדינטה j ב־Y_i – זה קורה בהסתברות $\frac{1}{n+1}$). אם X_iו־X_{i+1} נבדלים על הקורדינטה j אז $Y_{i+1} = Y_i = X_{j+1}$ (גם זה קורה בהסתברות $\frac{1}{n+1}$). בכל מקרה אחר הופכים ב־Y_i את הקורדינטה שהפכו ב־X_i. שוב צריך לשים לב ש־Y_{i+1} מקבל ערך מ־Y_i לפי מטריצת המעבר: בהסתברות $\frac{1}{n+1}$ הוא שומר על הערך ובהסתברות $\frac{n}{n+1}$ מתהפכת קורדינטה, כאשר כל קורדינטה של Y_i מתהפכת בהסתברות זהה, $\frac{1}{n+1}$.
- אם X_i ו־Y_i נבדלים ביותר מקורדינטה אחת, אז Y_{i+1} יוגדר כך: אם $X_i = X_{i+1}$ אז $Y_i = Y_{i+1}$. אם הופכים ב־X_i קורדינטה j שבה הערך זהה לערך המתאים של Y_i, אז הופכים את j גם ב־Y_i. אם הופכים ב־X_i קורדינטה j שבה הערך שונה מזה של Y_i, אז בוחרים באופן מקרי ויוניפורמי קורדינטה $j' \neq j$ שגם בה X_i שונה מ־Y_i, והופכים את j' ב־Y_i. גם כאן חישוב קל יגלה ש־Y_{i+1} מתקבל מ־Y_i (אם לא מתנים על X_{i+1}) לפי אותה מטריצת מעבר, ז"א לא ישתנה בהסתברות $\frac{1}{n+1}$, ויתהפך בקורדינטה מקרית יוניפורמית בהסתברות $\frac{n}{n+1}$.

עבור הוכחת הצימוד נשים לב שתמיד מתקיים הדבר הבא: אם X_i ו־Y_i זהים בקורדינטה ה־j, אז גם X_{i+1} ו־Y_{i+1} יהיו זהים על j. ואם X_i ו־Y_i שונים על j, אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{n+1}$ המשתנים X_{i+1} ו־Y_{i+1} יהיו זהים עתה על j (זה קורה בפרט אם j נבחרת להפיכה בקבלת X_{i+1} מ־X_i).

עבור $k = 2n \log n$, ההסתברות למאורע ש־X_k ו־Y_k לא יהיו זהים על הקורדינטה ה־j חסומה אם כן ע"י $(1 - \frac{1}{n+1})^k = o(n^{-1})$. לכן מאיחוד על n המאורעות המתאימים, ההסתברות ש־X_k ו־Y_k אינם זהים (על כל הקורדינטות) היא $o(1)$.