תרגיל ראשון

מקרי בריבוע

עבור קלט $k\in[n]$ נסמן ב־p_k את ההסתברות שמחרוזת אקראית R היא כזאת שהאלגוריתם לא יצליח על k ו־R. מההנחה מתקיים $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\le 1/3$ כלומר $\mathrm{E}_{k\in[n]}\left[p_k\right]\le 1/3$. לכן נובע מאי שוויון מרקוב $\Pr_k\left[p_k\ge 1/2\right]\le\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$, כלומר בהסתברות של לכל היותר $2/3$ נקבל k כזה שהאלגוריתם נכשל עליו בהסתברות לפחות $1/2$.

שידוך בגרף מקרי

נראה כי בהסתברות גבוהה מתקיימים תנאי משפט הול. נסמן ב־$N\left(A\right)$ את קבוצת השכנים של קבוצת הצמתים A, וכך עלינו להראות שלכל $A\subseteq L$ מתקיים כי $|A|\le|N\left(A\right)|$. ראשית נשים לב כי התנאי מתקיים באופן טריויאלי לכל קבוצה A בת $\frac{n}{100}$ צמתים או פחות (כי אפילו לצומת בודד יש מספר שכנים כזה).

עתה נחסום את ההסתברות שקבוצה שגודלה בין $\frac{n}{100}$ ל־$\frac{9999n}{10000}$ מפירה את אי־השוויון. אם $|A|>|N\left(A\right)|$, משמעות הדבר הוא שבצד ימין ישנה קבוצה B בת $\frac{9999n}{10000}<|A|-1$ צמתים המכילה את שכני $|A|$. ההסתברות שבחירה של שכן בודד של צומת בודד מ־A תהיה בתוך Bהיא חסומה ע"י $\frac{9999}{10000}$, ולכן ההסתברות שכל הבחירות יהיו כאלו חסומה ע"י $\left(\frac{9999}{10000}\right)^{|A|n/100}=2^{-\Theta(n^2)}$. בחסם השתמשנו בכך שהסיכוי שהדבר יקרה עבור בחירת שכנים בלי חזרות חסום ע"י הסיכוי עבור בחירת סדרת שכנים באופן ב"ת עם חזרות. אם נעשה איחוד מאורעות עבור כל ה־A וה־B האפשריים (שמספרם חסום באופן גס ביותר ע"י $2^n\cdot 2^n$) עדיין נקבל כאן סיכוי של $o(1)$ שתהיה קבוצה כזו.

עבור קבוצה A מגודל גדול מ־$\frac{9999n}{10000}$, נחסום את הסיכוי שבכלל יש צומת ב־R שאינו שכן של צומת מהקבוצה. מספיק לעשות זאת עבור קבוצות מגודל בדיוק $\frac{9999n}{10000}$, כי כל קבוצה אחרת תכיל קבוצה כזו. לצומת v בודד מ־R, הסיכוי שהוא לא שכן של A שווה ל־$\left(\frac{99}{100}\right)^{9999n/10000}<e^{-9n/100}$. עבור מספר הקבוצות A נשתמש הפעם בחסם עדין יותר: $\binom{n}{9999n/10000}=\binom{n}{n/10000}<\left(10000e\right)^{n/10000}$. עתה ניתן לבצע איחוד מאורעות עבור הסיכוי שיש קבוצה A כזו שלא כל צמתי R שכנים שלה (החישוב הוא עבור n גדול דיו): $n\cdot\left(10000e\right)^{n/10000}\cdot e^{-9n/100}<e^{\log n+20n/10000-9n/1000}=o(1)$.

אגב: אפשר (ועדיף) היה במקום "מספר הקסם" $\frac{9999}{10000}$ להציב α, להראות שהשלב השני (קבוצות "בינוניות") מתקיים עבור כל α קבוע ו־n גדול דיו, ואז להראות שהשלב השלישי (קבוצות "גדולות") יתקיים עבור α מסויים קרוב מספיק ל־1.

עגילים גדולים

נביט במשתנה המקרי X המקבל את אורך העגיל המכיל את 1 ב־σ. נראה כי משתנה מקרי זה מתפלג יוניפורמית ב־$[n]$ ולכן בהסתברות $1/2$ מקבל ערך גדול או שווה ל־$\frac{n}{2}$. השיטה הכי פשוטה לכך היא אם נשים לב שבחירה של עגיל מאורך i המכיל את 1 שקולה לבחירה של סדרה האורך $i-1$ מ־$n-1$ האיברים האחרים. עתה אפשר לחסום את $\Pr[X=i]$ ע"י ספירה (שימו לב שלאיברים שאינם משתתפים בעגיל המכיל את i יש $(n-i)!$ אפשרויות, כי σ מגדיר פרמוטציה כל שהיא ביניהם). מקבלים $\Pr\left[X=i\right]=\frac{\binom{n-1}{i-1}(i-1)!(n-i)!}{n!}=\frac{1}{n}$ כדרוש.

גרף מקרי ויחיד

הוכחת הלמה שבהדרכה פשוטה יחסית כל עוד שמים לב ל"אלגברה" של מרחבי הסתברות אינסופיים: בהינתן קבוצה סופית מסויימת U מגודל k, תת קבוצה $U'\subseteq U$ וצומת $v\notin U$, הסיכוי ש־v יהיה מחובר לכל צמתי U' ואינו מחובר לכל צמתי $U\setminus U'$ הוא בדיוק 2^{-k}. נסמן מאורע זה ב־A_v. קבוצת המאורעות $A_v:v\notin U$ היא בלתי תלויה לחלוטין, ולכן הסיכוי שאף אחד מהם לא יקרה הוא 0 (כגבול של $\left(1-2^{-k}\right)^l$ עבור $l\to\infty$).

נסמן ב־$B_{U,U'}$ את המאורע שאין צומת v כנדרש. ההסתברות למאורע זו היא 0, ומכיוון שיש מספר בן מניה של מאורעות $B_{U,U'}$ אפשריים, הסיכוי שיש אילו שהם U,U' ללא v מתאים הוא 0 (החסם על איחוד מאורעות עובד כל עוד מספרם הוא בן מניה).

הערה: במרחבי הסתברות אינסופיים יש הבדל בין "מאורע בהסתברות 0" לבין "מצב שאינו אפשרי". אפשר לתאר גרפים אינסופיים עבורם לא לכל U,U' יש v מתאים, אבל ההסתברות שיתקבל גרף דווקא מקבוצה זו היא עדיין 0.

עתה נניח ש־G ו־G' הם שני גרפים שנבחרו לפי $G(\mathbb{N},\frac{1}{2})$. בהסתברות 1, לכל U סופית ו־$U' \subseteq U$ יש צומת $v \notin U$ כך שב־G יש קשתות ממנו ל־U' ולא ל־$U \setminus U'$, וצומת $v' \notin U$ כך שב־G' יש קשתות ממנה ל־U' ולא ל־$U \setminus U'$. נסמן את הצמתים הנ"ל ב־$v_{U,U'}$ ו־$v'_{U,U'}$ בהתאמה (אם יש יותר מאפשרות אחת, נבחר את זו עם האינדכס הנמוך ביותר).

עתה נבנה באינדוקציה קבוצות W_i ו־W'_i ופונקציות חח"ע ועל $f_i : W_i \to W'_i$, כך שיתקיימו הדברים הבאים:

- לכל $i < j$ מתקיים $W_i \subseteq W_j$, $W'_j \subseteq W'_j$, ו־$f_j|_{W_i} = f_i$ (ז"א ש־f_j היא הרחבה של f_i).
- לכל i הפונקציה f_i היא איזומורפיזם מהגרף המושרה ע"י G על W_i אל הגרף המושרה ע"י G' על W'_i (ז"א שלכל $u,v \in W_i$, uv היא קשת של G אם ורק אם $f_i(u)f_i(v)$ היא קשת של G').
- מתקיים $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W'_i = \mathbb{N}$.

לאחר הבניה הנ"ל ניתן לבנות את האיזומורפיזם $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י כך שלכל $v \in \mathbb{N}$ נבחר את $f(v)$ להיות שווה ל־$f_i(v)$ עבור i המקיים $v \in W_i$. הפונקציה f מוגדרת על כל $\mathbb{N}$ בגלל הסעיף השלישי למעלה, ומוגדרת היטב בגלל הסעיף הראשון למעלה. היא חח"ע כי לכל $u \neq v$ ניתן לבחור i כך ששניהם ב־W_i ולבדוק את f_i, היא על כי לכל w ניתן לבחור i כך ש־$w \in W'_i$ (קיים לפי הסעיף השלישי) ולמצוא את $f^{-1}(w) = f_i^{-1}(w)$, והיא איזומורפיזם בין גרפים לפי הסעיף השני למעלה.

נותר אם כן לבנות את הקבוצות W_iו־W'_i ואת הפונקציות f_i. בסיס האינדוקציה יהיה $W_0 = W'_0 = \emptyset$, כאשר f_0 היא ה"פונקציה" הטריביאלית ביניהן. נניח שבנינו את הקבוצות והפונקציה עבור i, ונראה את הבניה עבור $i+1$. אנו נפצל למקרים לפי הזוגיות של i. כאן נשתמש בקונוונציה שהמספרים הטבעיים מתחילים מ־0.

עבור $i = 2k$, אם $k \in W_k$ אז פשוט נגדיר $W_{k+1} = W_k$, $W'_{k+1} = W'_k$ ו־$f_{k+1} = f_k$. אחרת, ראשית נסמן ב־U_k את קבוצת השכנים של k ב־W_k, וב־$U'_k \subseteq W'_k$ את התמונה שלהם לפי f_k. נגדיר עתה $W_{k+1} = W_k \cup \{k\}$ ו־$W'_{k+1} = W'_k \cup \{v'_{W'_k,U'_k}\}$. נגדיר $f_{k+1}(k) = v'_{W'_k,U'_k}$, ובשאר המקומות f_{k+1} תהיה זהה ל־f_k. הנחת האינדוקציה והידוע על $v'_{W'_k,U'_k}$ (כולל זה שאינו ב־W'_k) מבטיחה שהבניה תתן את הקבוצות והפונקציה המבוקשות.

עבור $i = 2k+1$, אם $k \in W'_k$ אז פשוט נגדיר $W_{k+1} = W_k$, $W'_{k+1} = W'_k$ ו־$f_{k+1} = f_k$. אחרת, ראשית נסמן ב־U'_k את קבוצת השכנים של k ב־W'_k, וב־$U_k \subseteq W_k$ את קבוצת המקורות שלהם לפי f_k (זכרו שזוהי פונקציה חח"ע ועל). נגדיר עתה $W'_{k+1} = W'_k \cup \{k\}$ ו־$W_{k+1} = W_k \cup \{v_{W_k,U_k}\}$. נגדיר $f_{k+1}(v_{W_k,U_k}) = k$, ובשאר המקומות f_{k+1} תהיה זהה ל־f_k. הנחת האינדוקציה והידוע על v_{W_k,U_k} (כולל זה שאינו ב־W_k) מבטיחה שהבניה גם כאן תתן את הקבוצות והפונקציה המבוקשות.

כל התנאים המבוקשים פרט לדרישת האיחוד בסעיף השלישי יתקיימו באינדוקציה, וכן לכל k מובטח שהוא נמצא ב־W_{2k+1} וב־W'_{2k+2}, וכך מתקיימת גם דרישת האיחוד. בזאת סיימנו את המבוקש.

תרגיל שני

קליק ממוצע

נראה כאן באינדוקציה שלכל k ו־$0 < c < 1$ קיים $\alpha(c,k) > 0$ כך שעבור n גדול דיו, בהסתברות של לכל היותר $e^{-\alpha n}$, מספר ה־k־קליקים יהיה פחות $(1-c)2^{-\binom{k}{2}}\binom{n}{k}$ או יותר מ־$(1+c)2^{-\binom{k}{2}}\binom{n}{k}$. טענת השאלה נובעת מהצבת $c = \frac{1}{2}$. בסיס האינדוציה, $k = 1$, הוא טריביאלי (תמיד יהיו בדיוק n "1־קליקים").

נניח שהטענה הוכחה עבור $k-1$. ראשית נראה שלכל $0 < c < 1$ ו־n גדול דיו, עבור $\beta(c,k) > 0$ מתאים בהסתברות של לכל היותר $e^{-\beta n}$, לכל קבוצה U בת $k-1$ צמתים מתקיים שמספר הצמתים $v \notin U$ אשר מחוברים לכל איברי U אינו נמצא בין $(1-c)2^{-k}(n+1-k)$ ל־$(1+c)2^{-k}(n+1-k)$. תוצאה זו נובעת מכך שהמאורע A_v עבור כל v מתאים שהוא מחובר לכל U קורה בהסתברות 2^{-k} בדיוק, ושכל המאורעות $\{A_v : v \in V \setminus U\}$ הם ב"ת לחלוטין זה בזה.

אם עתה נספור את כל הזוגות של $k-1$־קליק פלוס צומת נוסף המשלים אותו ל־k־קליק, נקבל שעבור n גדול דיו ההסתברות שמספר הזוגות לא יהיה בין $(1-c)2^{-\binom{k-1}{2}}2^{-k}\binom{n}{k-1}(n+1-k) = (1-c)2^{-\binom{k}{2}}k\binom{n}{k}$ לבין $(1-c)2^{-\binom{k}{2}}k\binom{n}{k}$ היא חסומה ע"י $e^{-\alpha(c/2,k-1)n} + e^{-\beta(c/2,k)n}$. אם נשים לב שמספר הזוגות הנ"ל הוא בדיוק k פעמים מספר ה־k־קליקים בגרף, נוכל לסיים ע"י ההצבה $\alpha(c,k) = \frac{1}{2}\min\{\alpha(c/2,k-1), \beta(c/2,k)\}$.

ריכוז במרחב

משתמשים בשיטת המומנט השני, מסתכלים על תת המרחב כתוצאה מבחירה יוניפורמית של שני וקטורים ב"ת $u, v \in \mathbb{Z}_p^n$ ומעבר לתת המרחב הנפרש (מספר הבסיסים הפורשים זהה לכל תת מרחב אפשרי ממימד 2, ולכן זו תהיה בחירה יוניפורמית של תת המרחב), ואז עבור כל α, β שאינם שניהם 0 מגדירים את $X_{\alpha,\beta}$ כמשתנה האינדיקטור עבור המאורע "$\alpha u + \beta v \in A$". נשים לב גודל החיתוך של תת המרחב עם A נתון ע"י $\sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_p} X_{\alpha,\beta}$, וכן שמתקיים $\mathrm{E}[X_{\alpha,\beta}] = \frac{1}{2}$ לכל α, β ולכן $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}(p^2-1)$.

המשתנים $X_{\alpha,\beta}$ ו־$X_{\alpha',\beta'}$ הם ב"ת (כזוג) אם (α,β) ו־(α',β') הם ב"ת (כזוג וקטורים ב־$\mathbb{Z}_p^2$). זה אומר שיש לא יותר מ־$(p-1)(p^2-1)$ זוגות משתנים תלויים, ולאלו הקווריאנס חסום ע"י $\frac{1}{2}$. על כן מתקיים $\mathrm{V}[X] = \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'} \mathrm{Cov}[X_{\alpha,\beta}, X_{\alpha',\beta'}] \le \frac{1}{2}(p-1)(p^2-1) < (p^2-1)^{3/2}$. עתה אפשר לסיים ע"י שימוש באי שוויון צ'בישף: $\Pr[|X - \frac{1}{2}(p^2-1)| > (p^2-1)^{7/8}] < (p^2-1)^{-1/4} = o(1)$, כאשר בפרט $(p^2-1)^{7/8} = o(p^2-1)$.

קבוצות שוות סכום

לצערינו, נפלה טעות בשאלה. בפרט, ניתן לפתור אותה באופן הפשוט הבא: נבחר תת קבוצה $A' \subseteq A$ בת $\log n + \frac{1}{2}\log\log n + 10$ איברים בדיוק. לפי מה שהוכח בהרצאה, מובטח כי בקבוצה זו קיימות שתי תתי קבוצות $B, C \subseteq A'$ עם אותו סכום. ניתן למצוא את שתי קבוצות אלה בחיפוש ממצה על פני תתי הקבוצות של A' בזמן פולינומי ב־n. נסיון להשתמש במרחבי מדגם מוגבלים למעשה רק מסבך את העניינים.

התקבלו גם תשובות שהשתמשו באופטימיזציות על החיפוש הממצה (למען האמת לא היו תשובות שגויות בהגשות של שאלה זו).

תרגיל שלישי

משתנים תלויים בשרשרת

נגדיר את ההגרלה של סדרת המשתנים באינדוקציה: X_1יקבל את הערך 0 בהסתברות $\frac{1}{n}$, ואת הערך 1 בהסתברות $1 - \frac{1}{n}$. לאחר שהגרלנו את X_i, בהסתברות $\frac{1}{n}$ (באופן ב"ת במה שעשינו קודם) נקבע את $X_{i+1} = 1 - X_i$ ובהסתברות $1 - \frac{1}{n}$ נקבע את $X_{i+1} = X_i$.

הסיכוי עבור המאורע $\sum_{i=1}^n X_i = k$ הוא לפחות הסיכוי ש־$X_1, \ldots, X_k = 1$ וגם $X_{k+1}, \ldots, X_n = 0$. הסיכוי לקבל בדיוק את הסדרה הזו שווה ל־$\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{n-1} > 1/en$, ולכן כל k בין 0 ל־n יכול להתקבל בהסתברות לפחות $1/en$. מכאן שסדרת מ"מ זו היא דוגמא נגדית כנדרש (ההתפלגות על הסכום "דומה" להתפלגות היוניפורמית ולא קשה להראות שאין עבורה $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ מתאימים לכל k קבוע).

חיתוך עם קבוצה מקרית

אנו נגדיר את מרטינגל החשיפה עבור $|U \cap \{1, \ldots, n\}|$ באופן הבא: נזהה את U עם הפונקציה האופיינית $f_U : \{1, \ldots, 2n\} \to \{0, 1\}$ (כאשר $f_U(i) = 1$ אםם $i \in U$), ונגדיר את החשיפה לפי $\mathcal{D}_i = \{1, \ldots, i\}$. יהי $X_1, \ldots, X_{2n}$ מרטינגל החשיפה המתאים. שימו לב שתמיד מתקיים $X_{2n} = X_n$ ולכן מספיק לחסום את ההתפלגות של X_n.

על מנת להשתמש במשפט אזומה ולקבל את הנדרש, מספיק להוכיח שלכל $1 < i \leq n$ מתקיים תמיד $|X_i - X_{i-1}| \leq 1$. מכיוון ש־f_U אינה מוגרלת "כל ערך באופן בלתי תלוי", נוכיח את אי השוויון הזה ישירות.

נניח שהגרלנו את $\hat{U}$ לפי ההתפלגות המצויינת (ז"א קבוצה מקרית מגודל n בדיוק), ונחשב את $X_i(\hat{U})$ לכל i. לצורך זה ניעזר במספרים $k_0, \ldots, k_n$ שיוגדרו לפי $k_i = |U \cap \{1, \ldots, i\}|$ (שימו לב שאלו אינם ערכי X_i). עתה ניתן לחשב:

$$\begin{aligned} X_i &= \mathrm{E}[|U \cap \{1, \ldots, n\}| \,|\, U \cap \{1, \ldots, i\} = \hat{U} \cap \{1, \ldots, i\}] \\ &= \mathrm{E}[|U \cap \{1, \ldots, n\}| \,|\, |U \cap \{1, \ldots, i\}| = k_i] = k_i + \frac{(n-i)(n-k_i)}{2n-i} \end{aligned}$$

עתה נחסום את $|X_i - X_{i-1}| = |k_i - k_{i-1} + \frac{(n-i)(n-k_i)}{2n-i} - \frac{(n+1-i)(n-k_{i-1})}{2n+1-i}|$. ישנם שני מקרים: המקרה $k_i = k_{i-1}$, שאז ההפרש הוא $\frac{n(n-k_i)}{(2n-i)(2n+1-i)} < 1$, והמקרה $k_i = k_{i-1} + 1$, שאז ההפרש המתקבל הוא $|1 + \frac{(n-i)(n-k_i)}{2n-i} - \frac{(n+1-i)(n+1-k_i)}{2n+1-i}| < 1$. בזאת קיבלנו את המבוקש.

מילים לא חזרתיות

נקבע $n \in \mathbb{N}$ כל שהוא, ונסמן ב־$A_{i,m}$ את המאורע שתת המחרוזת $w_i, w_{i+1}, \ldots w_{i+2m-1}$ היא חזרה. בבירור מתקיים $\Pr[A_{i,m}] = k^{-m}$. כמו כן, המאורע $A_{i,m}$ בהכרח בלתי תלוי בכל המאורעות $A_{j,p}$ עבורם $\{i, i+1, \ldots, i+2m-1\} \cap \{j, j+1, \ldots, j+2p-1\} = \emptyset$. מספר הקטעים מאורך $2l$ שנחתכים עם הקטע שמתאים ל־$A_{i,m}$ הוא לכל היותר $2m + 2l$. נסמן ב־$N_{i,m}$ את קבוצת האינדכסים שעבורם הקטעים המתאימים נחתכים עם $\{i, i+1, \ldots, i+2m-1\}$. אנו נשתמש בגרסא הכללית ביותר של הלמה הלוקלית. נקבע $x_{i,m} = \frac{1}{6^m+1}$, ונראה שאכן תנאי הלמה מתקיימים:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6^m+1}\prod_{(j,p)\in N_{i,m}}\left(1-\frac{1}{6^p+1}\right) &\geq \frac{1}{6^m+1}\prod_{l=1}^{n/2}\left(1-\frac{1}{6^l+1}\right)^{2m+2l} \\
&\geq \frac{1}{6^m+1}\prod_{l=1}^{n/2}\exp\left(-\frac{2m+2l}{6^l+1}\right) \\
&= \frac{1}{6^m+1}\exp\left(-\sum_{l=1}^{n/2}\frac{2m+2l}{6^l+1}\right) \\
&= \frac{1}{6^m+1}\exp\left(-2m\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{6^l+1}-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l}{6^l+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{6^m+1}\exp\left(-4m-5\right) \\
&\geq \exp\left(-12m\right)
\end{aligned}$$

לכן אם $k \geq \lceil e^{12} \rceil$ נקבל לכל i, m כי

$$x_{i,m}\prod_{(j,p)\in N_{i,m}}(1-x_{j,p}) = \frac{1}{6^m+1}\prod_{A_{j,p}\in N_{i,m}}\left(1-\frac{1}{6^p+1}\right) \geq k^{-m} = \Pr[A_{i,m}]$$

כנדרש (חישובים זהירים יותר יניבו חסם סביר יותר על k).

תרגיל רביעי

בלי הרבה נפנוף ידיים (חלק ראשון)

נראה שעבור כל ϵ קיים S כך שאם $s > S$ אז $\mathrm{E}[H_s] = (1 \pm \epsilon)s\pi_v$. ראשית נראה זאת עבור המקרה שבו הגרף אינו דו צדדי. נסמן ב־A_t את משתנה האינדיקטור שמקבל 1 אם $X_t = v$ ומקבל 0 אחרת. מכיוון שההתפלגות הלא מותנה של X_t שואפת להתפלגות הסטציונרית עבור $t \to \infty$, קיים T כך שאם $t > T$ אז $\mathrm{E}[A_t] = (1 \pm \epsilon/2)s\pi_v$. כמו כן $0 \le \mathrm{E}[A_t] \le 1$ גם עבור $t \le T$. לכן ניתן לבחור $S = 2T/\epsilon$ ואז עבור $s > S$ נקבל $\mathrm{E}[H_s] = \sum_{t=1}^{s} \mathrm{E}[A_t] = (1 \pm \epsilon)s\pi_v$ כנדרש.

עבור המקרה שבו הגרף דו צדדי, במקום לנתח את A_t מנתחים את $(A_t + A_{t+1})/2$. סכום זה ישאף להתפלגות הסטציונרית עבור $t \to \infty$, מכיוון שסכום ההתפלגויות הלא־מותנות של X_{t+1} ושל X_t לא יכיל בפירוקו לפי הווקטורים העצמיים של מטריצת המעבר את זה המתאים לערך העצמי -1 (המקדמים המתאימים יתקזזו).

בלי הרבה נפנוף ידיים (חלק שני)

נראה שעבור כל ϵ, δ קיים S כך שאם $s > S$ אז $H_s = (1 \pm \epsilon)s/\tau$ בהסתברות לפחות $1 - \delta$. נגדיר סידרה של מ"מ $Y_1, Y_2, \ldots$ אשר יקבעו ע"י ההילוך המקרי שלנו. Y_j יהיה מספר הצעדים בין הביקור ה־$j-1$ לבין הביקור ה־j ב־v, כאשר הביקור $X_0 = v$ יקרא "הביקור ה־0". נשים לב שלכל $j > 0$ מתקיים $\mathrm{E}[Y_j] = \tau$ וכן שה־Y_j כולם ב"ת (עקב תכונת חוסר הזיכרון של ההילוך המקרי), וכן שקיים α(תלוי בגרף) כך ש־$\mathrm{V}[Y_j] = \alpha$ (לא קשה להוכיח זאת, אבל בשאלה עצמה נאמר שלא צריך).

אם לא מתקיים $H_s = (1 \pm \epsilon)s/\tau$, אז ישנן שתי אפשרויות. אם $H_s > (1 + \epsilon)s/\tau$, אז בפרט חייב להתקיים $\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)s} Y_j \le s\tau$. עתה אפשר להשתמש בשיטת המומנט השני: מתקיים $\mathrm{E}[\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)s} Y_j] = (1 + \epsilon)s\tau$ וכן $\mathrm{V}[\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)s} Y_j] = (1 + \epsilon)s\alpha$, ולכן עבור s גדול דיו הסיכוי לסטיה של $\sum_{j=1}^{(1+\epsilon)} Y_j$ ב־$\epsilon s\tau$ מהממוצע חסום ע"י $\delta/2$.

אם $H_s < (1 - \epsilon)s/\tau$, אז בפרט חייב להתקיים $\sum_{j=1}^{(1-\epsilon)s} Y_j \ge s\tau$, וגם כאן אפשר להשתמש בשיטת המומנט השני ולקבל שעבור s גדול דיו הסיכוי לסטיה של $\sum_{j=1}^{(1-\epsilon)s} Y_j$ ב־$\epsilon s\tau$ מהממוצע חסום גם כאן ע"י δ/s. מאיחוד שתי האפשרויות לסטיה אנו מקבלים את המבוקש.

גם זו הרמונית

נסמן ב־$X_0, X_1, \ldots$ הילוך מקרי המתחיל ב־s, ועבור $v \in V$ ו־$k \ge 0$ נגדיר את מ"מ האינדיקטור $A_k^{(v)}$ אשר מקבל 1 אם $X_k = v$ ולא קיים $l \le k$ עבורו $X_l = t$, ואחרת מקבל 0. שימו לב שבפרט $A_0^{(v)} = 1$ אם ורק אם $v = t$, וש־$A_k^{(t)} = 0$ לכל k. כמו כן $\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(v)}$ הוא בדיוק מספר הפעמים שהילוך ביקר ב־v לפני שהגיע לראשונה ל־t, ולכן מלינאריות התוחלת מתקיים עבור הפונקציה שלנו $\phi_{st}(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[A_k^{(v)}]$.

שימו לב עתה שלכל $k > 0$, לכל $v \in V \setminus \{s, t\}$ ולכל סדרת ערכים $\langle b_u \rangle_{u \in V}$ (שמתקבלים בהסתברות חיובית) משתני האינדיקטור שלנו מקיימים $\mathrm{E}[A_k^{(v)} | \forall_{u \in V} A_{k-1}^{(u)} = b_u] = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} \frac{1}{d(u)} b_u$ ישירות מהגדרות ההילוך המקרי, ולכן מתקיים $\mathrm{E}[A_k^{(v)}] = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} \frac{1}{d(u)} \mathrm{E}[A_{k-1}^{(u)}]$. זה נכון גם עבור מקרי הקצה ש־s ו/או t נמצאים בשכנים של v. דבר נוסף לשים לב הוא שעבור $v \in V \setminus \{s, t\}$ מתקיים $\phi_{st}(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(v)}$ (כי $A_0^{(v)} = 0$), ואז ניתן לסיים:

$$\phi_{st}(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[A_k^{(v)}] = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} \frac{1}{d(u)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[A_k^{(u)}] \right) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} \phi_{st}(u)$$

משפחות נחתכות בגרפים לא צביעים

נעקוב אחרי פתרון התרגיל "גרפים נחתכים" מחוברת התרגילים. נסמן ב־N את קבוצת כל $\binom{n}{2}$ הזוגות הלא סדורים של איברים ב־$[n]$. נביט ב־$\mathcal{F}$ כמשפחה של תתי קבוצות של N. תהא $\mathcal{G}$ משפחת כל תתי הקבוצות של N המתאימות לאיחוד h גרפים מלאים עם בין $\lfloor \frac{n}{h} \rfloor$ ל־$\lceil \frac{n}{h} \rceil$ צמתים. מספר הקשתות בגרף כזה הוא $s < \frac{1}{h}\binom{n}{2}$, ונסמן גם $|\mathcal{G}| = m$. משיקולי סימטריה כל קשת ב־N נמצאת בבדיוק $sm/\binom{n}{2}$ גרפים ב־$\mathcal{G}$.

נשים לב שלכל $G \in \mathcal{G}$ מתקיים שהמשלים שלו הוא h צביע ולכן אינו מכיל את H. לכן כל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ נחתכים בקשת מ־G. לכן ניתן לחזור על הטיעונים מהתרגיל "גרפים נחתכים" ולקבל ש־$|\mathcal{F}|^{sm/\binom{n}{2}} \leq 2^{m(s-1)}$ ולכן $|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{n}{2}-\binom{n}{2}/s} < 2^{\binom{n}{2}-h}$.

משפחות נחתכות בשידוכים

שוב נעקוב אחרי פתרון התרגיל "גרפים נחתכים" מחוברת התרגילים. נסמן ב־N את קבוצת כל $\binom{2n}{2}$ הזוגות הלא סדורים של איברים ב־$[2n]$. נביט ב־$\mathcal{F}$ כמשפחה של תתי קבוצות של N. תהא $\mathcal{G}$ משפחת כל תתי הקבוצות של N המתאימות לכוכבים (פורשים) על $2n$ צמתים. מספר הקשתות בגרף כזה הוא $s = 2n-1$, ונסמן גם $|\mathcal{G}| = m$. שוב, משיקולי סימטריה כל קשת ב־N נמצאת בבדיוק $sm/\binom{2n}{2}$ גרפים ב־$\mathcal{G}$.

נשים לב שלכל $G \in \mathcal{G}$ מתקיים שהשידוך המקסימלי במשלים שלו הוא עם $n-1$ קשתות (לא ניתן להשתמש במרכז הכוכב) ולכן כל שני גרפים ב־$\mathcal{F}$ נחתכים בקשת מ־G. לכן ניתן לחזור על אותם טיעונים ולקבל ש־$|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{2n}{2}-\binom{2n}{2}/s} = 2^{\binom{2n}{2}-n}$.