תרגיל ראשון

משחקים בתוחלות

אם מתקיים $\frac{\mathrm{E}[X]}{\mathrm{E}[Y]} \geq \alpha$, אז בהעברת אגפים $(\mathrm{E}[X] - \alpha\mathrm{E}[Y]) \geq 0$, ומלינאריות התוחלת $\mathrm{E}[X - \alpha Y] \geq 0$. בפרט בהסתברות חיובית $X - \alpha Y \geq 0$, ובהעברת אגפים (מכיוון ש־Y מקבל רק ערכים חיוביים) מקבלים שאז מתקיים $\frac{X}{Y} \geq \alpha$ כנדרש.

תרגום וקטורים ממשיים לקבוצות

1. נסמן לכל $1 \leq i \leq n$ את I_i כמשתנה האינדיקטור עבור $i \in S_t$ (ז"א הוא מקבל 1 אם המאורע מתקיים, ו־0 אחרת). מתקיים $|S_t| = \sum_{i=1}^n I_i$ וכן לכל i מתקיים $\mathrm{E}[I_i] = \Pr[i \in S_t] = x_i$, ולכן מליניאריות התוחלת $\mathrm{E}[|S_t|] = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^n I_i] = \sum_{i=1}^n x_i$ כנדרש.
2. נסמן לכל $1 \leq i, j \leq n$ ב־I_{ij} את משתנה האינדיקטור עבור המאורע שגם $i \in S_t$ וגם $j \notin S_t$. נשים לב שאם $x_i > x_j$ אז המאורע הנ"ל קורה בהסתברות $x_i - x_j$, ובכל מקרה אחר המאורע קורה בהסתברות 0. עתה נפתח תוך שימוש בנתון על הסימטריה $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i\in S,\, j\in[n]\setminus S} a_{ij}\right) &= \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ x_i>x_j}} a_{ij}\,(x_i - x_j) + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ x_i<x_j}} a_{ji}\,(x_j - x_i) \\
&= \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ x_i>x_j}} a_{ij}\,|x_i - x_j| + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ x_i<x_j}} a_{ij}\,|x_i - x_j| = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}\,|x_i - x_j|
\end{aligned}$$

מערכת חלוקות

עבור בניית המערכת נגריל את $A_1, \ldots, A_t$ באופן יוניפורמי וב"ת, ז"א שלכל $k \in I$ ולכל $1 \leq r \leq t$ מתקיים $k \in A_r$ בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת בכל המאורעות האחרים מהסוג הזה. בהינתן $k \in U$ ותתי קבוצה I, J כמו בשאלה, ההסתברות עבור המאורע $k \in \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J}(U \setminus A_j)$ היא $1 - 2^{-h}$ בדיוק (כי ה־A_r הוגרלו באופן ב"ת זו בזו וזה לא משנה אם בודקים שייכות ל־A_r או למשלימתה). בנוסף לכך מאורע השייכות הנ"ל הוא בלתי תלוי במאורעות השייכות לאיברים אחרים ב־U, ולכן הסיכוי עבור $\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J}(U \setminus A_j) = U$ הוא בדיוק $(1 - 2^{-h})^m < \exp(-m2^{-h})$. מספר האפשרויות הכולל לבחירת I, J הוא $2^h\binom{t}{h} < (2t)^h$. לכן עבור (למשל) $m = \lceil 3 \cdot 2^h h \log t\rceil$ מתקיים $(2t)^h \exp(-m2^{-h}) < 1$, ולכן בהסתברות חיובית אף אחד מהמאורעות אינו קורה ו־$A_1, \ldots, A_t$ מקיימת את המבוקש.

חוסר מסודרות

ראשית נשים לב שיש לפחות ϵn ביטים שווים ל־1 בסידרה $b_1, \ldots, b_n$, אחרת היא לא מקיימת את הנתון ביחס ל־$i = n$. עבור $t = \lceil \epsilon n\rceil$ (אגב, בתרגילים הבאים נשמיט סימני "עיגול לשלם") נסמן ב־j את המיקום של הביט ה־t מבין אלו ששווים ל־1. במהלך ה־$\lceil 2/\epsilon\rceil$ האינדכסים הראשונים שהוגרלו, בסיכוי לפחות $1 - (1-\epsilon)^{\lceil 2/\epsilon\rceil} > 1 - e^{-2} > \frac{3}{4}$ הוגרל אינדכס $k \leq j$ שעבורו $b_k = 1$. לפי הנתון של השאלה (עבור $i = k$) יש לפחות ϵn ביטים שווים ל־0 ב־$b_{k+1}, \ldots, b_n$, כי אין מספיק ביטים שווים ל־1 ב־$b_1, \ldots, b_{k-1}$ עקב מיקומו ביחס ל־j. לכן במהלך ה־$\lceil 2/\epsilon\rceil$ האינדכסים הבאים שהוגרלו, בסיכוי לפחות $\frac{3}{4} < 1 - e^{-2} < 1 - (1-\epsilon)^{\lceil 2/\epsilon\rceil}$ הוגרל $l > k$ שעבורו $b_l = 0$. סה"כ בסיכוי לפחות $\frac{1}{2}$ הוגרלו אינדכסים k, l המקיימים את המבוקש.

תרגיל שני

סימולציה של הסתברות

נבצע סימולציה של בחירה יוניפורמית של $0 \le \beta \le 1$, ונעצור את הסימולציה ברגע שהשאלה האם $\beta \le \alpha$ או $\alpha \ge \beta$ היא בעלת תשובה וודאית. באופן פורמלי: נתחיל עם $\beta_0 = 0$ ו־$k = 1$. בכל שלב (תוך שימוש ב"הטלת מטבע" חדשה בודדת), בהסתברות $\frac{1}{2}$ נקבע $\beta_k = \beta_{k-1}$ ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נקבע $\beta_k = \beta_{k-1} + 2^{-k}$. אם $\alpha \ge \beta_k$ אז נעצור מיידית ונחזיר "0". אם $\alpha < \beta_k + 2^{-k}$ אז נעצור מיידית ונחזיר 1. בכל מקרה אחר נגדיל את k ב־1 ונעבור לשלב הבא.

על מנת להראות שתוחלת מספר השלבים (ולכן גם מספר הטלות המטבע) חסומה ע"י מספר קבוע, נראה שבכל שלב יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ שהאלגוריתם יעצור. אם האלגוריתם לא עצר בשלב ה־$k - 1$ (או קודם) אז לפי תנאי העצירה שנבדק שם מתקיים $\beta_{k-1} < \alpha \le \beta_{k-1} + 2^{1-k}$. אם $\alpha \le \beta_{k-1} + 2^{-k}$, אז נעצור בשלב הנוכחי רק אם קבענו $\beta_k = \beta_{k-1} + 2^{-k}$, ואם $\alpha > \beta_{k-1} + 2^{-k}$ אז נעצור בשלב הנוכחי רק אם קבענו $\beta_k = \beta_{k-1}$. בשני המקרים נעצור בהסתברות $\frac{1}{2}$.

עתה נחשב את הסיכוי הכולל שהאלגוריתם יעצור בסופו של דבר עם התשובה "1". אנחנו יודעים מהפסקא הקודמת שהסיכוי שהאלגוריתם לא עצר עד סוף השלב ה־k הוא בדיוק 2^{-k}, וזה כולל את המקרה "$k = 0$" (האלגוריתם בסיכוי 1 יבצע את השלב הראשון). נראה באינדוקציה שאם $l2^{-k} \le \alpha < (l+1)2^{-k}$, אז בסיכוי $l2^{-k}$ בדיוק האלגוריתם יעצור עד סוף השלב ה־k עם תשובה 1. זה אומר שהסיכוי שהאלגוריתם יעצור בשלב כל שהוא עם תשובה "1" הוא α בדיוק.

נניח אם כן ש-$l'2^{1-k} \le \alpha < (l'+1)2^{1-k}$, ובאינדוקציה שהסיכוי שהאלגוריתם עצר עם "1" עד השלב ה־$k - 1$ הוא $l'2^{1-k}$ בדיוק (סימו לב שההנחה נכונה עבור הבסיס $k = 1$ עם $l' = 0$). אנו גם יודעים שהמאורע (הזר) שהאלגוריתם הגיע לראשית השלב ה־k הוא 2^{1-k}. במקרה הנ"ל אנו יודעים גם ש-$\beta_{k-1} = l'2^{1-k}$ (ברור ש־β_{k-1} הוא כפולה שלמה של 2^{1-k}, והמכפיל הוא לפי התנאי שהאלגוריתם בדק בשלב ה־$k - 1$). נותר רק לבדוק את שני המקרים: אם $\alpha \le \beta_{k-1} + 2^{-k}$ אז $l = 2l'$ ואכן ההתפלגות (המותנה על הגעה לשלב ה־k) שהאלגוריתם יענה "1" בשלב זה היא אפס. אם $\alpha > \beta_{k-1} + 2^{-k}$ אז $l = 2l' + 1$ וההתפלגות (המותנה) שהאלגוריתם יענה "1" עתה היא $\frac{1}{2}$, אשר בחישוב הכולל תיתן תנו את הסכום המבוקש $l2^{-k}$ עבור ההתפלגות לתשובה "1" בשלב כל שהוא עד סוף השלב ה־k.

עוד קצת חתך

כזכור (מהתרגול), אם נגריל באופן יוניפורמי חלוקה V_1, V_2 של קבוצת הצמתים V של הגרף (לכל $v \in V$ נגריל באופן יוניפורמי האם $v \in V_1$ או $v \in V_2$), אז תוחלת מספר הקשתות בחתך היא $\frac{1}{2}m$. נשים לב אבל שאם החלוקה היא טריביאלית ($V = V_1$ או $V = V_2$) אז מספר הקשתות בחתך הוא 0. על כן אם נגריל את החלוקה באופן מותנה על המאורע שהחלוקה אינה טריביאלית, תוחלת מספר הקשתות תהיה עתה גדולה ממש מ־$\frac{1}{2}m$ (כאן השתמשנו ב־$m > 0$). מכאן שקיימת חלוקה עבורה מספר הקשתות בחתך גדול מ־$\frac{1}{2}m$.

פונקציית סף בגרף דו צדדי

יהי X המ"מ שערכו שווה למספר העותקים של $K_{2,2}$ (ריבועים) בגרף. אם עבור $1 \le i < k \le n$ ו־$1 \le j < l \le n$ נסמן ב־$X_{i,k,j,l}$ את משתנה האינדיקטור עבור המאורע ש־$\{u_i, u_k, v_j, v_l\}$ מהווים ריבוע, אז מתקיים $X = \sum_{i,k,j,l} X_{i,k,j,l}$ כאשר הסכום רץ על האינדכסים המקיימים את התנאי המתאים. בהמשך כאן נסמן את המ"מ הזה ב־$X_{I,J}$, כאשר $I = \{i, k\}$ ו־$J = \{j, l\}$.

חישוב התוחלת: $\mathrm{E}[X] = \sum_{I,J} X_{I,J} = \binom{n}{2}^2 (p(n))^4 = \Theta(n^4 (p(n))^4)$.

לחישוב השונות נסמן $\mathrm{V}[X] = \sum_{I,J,I',J'} \mathrm{Cov}[X_{I,J}, X_{I',J'}]$ ונחשב את התרומות לסכום לפי מקרים.

- $I \cap I' = 0$ או $J \cap J' = 0$ (או שניהם): המ"מ המתאימים הם בלתי תלויים, והתרומה היא אפס.

- $I \cap I' = 1$ וגם $J \cap J' = 1$: יש בדיוק זוג צמתים אחד משותף מבין אלו שצריכים להיות קשתות בשני הריבועים המתאימים. לכן:

$$\mathrm{Cov}[X_{I,J}, X_{I',J'}] = \mathrm{E}[X_{I,J}X_{I',J'}] - \mathrm{E}[X_{I,J}]\mathrm{E}[X_{I',J'}] \le \mathrm{E}[X_{I,J}X_{I',J'}] = (p(n))^7$$

מספר הצמדים הנ"ל (כולל אפשרות להחלפה בין I ו־I' וכו') הוא $n^2(n-1)^2(n-2)^2 = \Theta(n^6)$. על כן סה"כ התרומה לסכום של זוגות משתנים מהטיפוס הזה הוא חסום ע"י $\Theta(n^6(p(n))^7)$.

- $I = I'$ וגם $J \cap J' = 1$: יש שני זוגות משותפים (אלו המכילים את הצומת המשותף ל־J ו־J'). מתקבל $\mathrm{Cov}[X_{I,J}, X_{I',J'}] \le \mathrm{E}[X_{I,J}X_{I',J'}] = (p(n))^6$. מספר הצמדים הוא $\binom{n}{2}n(n-1)(n-2) = \Theta(n^5)$ ולכן התרומה הכוללת היא $\Theta(n^5(p(n))^6)$.

- $I \cap I' = 1$ וגם $J = J'$: כמו המקרה הקודם, התרומה הכוללת היא $\Theta(n^5(p(n))^6)$.

- $I = I'$ וגם $J = J'$: הקוווריאנס הוא השונות, $\mathrm{V}[X_{I,J}] \le \mathrm{E}[X_{I,J}^2] = (p(n))^4$. התרומה הכוללת חסומה ע"י $\binom{n}{2}^2(p(n))^4 = \Theta(n^4(p(n))^4)$.

בזאת כיסינו את כל המקרים, וקיבלנו את החסם $\mathrm{V}[X] \le \Theta(n^6(p(n))^7 + n^5(p(n))^6 + n^4(p(n))^4)$.

כאשר $p(n) = \omega(1/n)$, לסיום ההוכחה (כפי שנעשה בכיתה ל־K_4) נראה שמתקיים $\frac{\mathrm{V}[X]}{(\mathrm{E}[X])^2} = o(1)$:

$$\frac{\mathrm{V}[X]}{(\mathrm{E}[X])^2} \le \Theta(n^{-2}(p(n))^{-1} + n^{-3}(p(n))^{-2} + n^{-4}(p(n))^{-4}) = o(n^{-1} + n^{-1} + 1) = o(1)$$

תתי קבוצות מקריות

נסמן את תתי הקבוצות המקריות ב־$A_1, \ldots, A_{2n}$, ולכל $1 \le i \le 2n$ נסמן ב־X_i את המאורע ש־A_i מכילה לפחות איבר אחד מ־$\{1, \ldots, n\}$ שמוכל בלפחות 40 מהקבוצות $A_1, \ldots, A_{i-1}$. אם בסוף נבחר את תתי הקבוצות $\{A_i | X_i = 0\}$, הרי שאלו יקיימו את התנאי הנדרש על מספר המופעים של איברי $\{1, \ldots, n\}$, ולכן עלינו להוכיח שבסיכוי חסום ע"י $e^{-\Theta(n)}$ בלבד יהיו פחות מ־n קבוצות כאלו, דבר השקול לביטוי $X = \sum_{i=1}^{2n} X_i > n$.

לפי ספירה פשוטה, מספר האיברים מ־$\{1, \ldots, n\}$ המשתתפים בלפחות 40 קבוצות מ־$A_1, \ldots, A_{i-1}$ לעולם אינו עולה על $\frac{3}{20}n$. על כן, אפילו ש־X_i תלוי ב־$X_1, \ldots, X_{i-1}$, יתקיים $\Pr[X_i = 1 | X_1, \ldots, X_{i-1}] \le \frac{9}{20}$ (לכל סדרת ערכים אפשרית עבור $X_1, \ldots, X_{i-1}$). השאלה איך נובע מזה החסם $\Pr[X > n] \le e^{-\Theta(n)}$ מושארת לתרגיל הבא.

תרגיל שלישי

בהמשך לתרגיל הקודם

על מנת לחסום את $X = \sum_{i=1}^{2n} X_i$ נגדיר $Y_1, \ldots, Y_{2n}$ אשר יהיו ב"ת זה בזה לחלוטין (אבל תלויים ב־$X_1, \ldots, X_{2n}$) ושעבורם יתקיים $Y_i \geq X_i$ וכן $\Pr[Y_i] = \frac{9}{20}$. נבנה את אלו באינדוקציה, את Y_i נגדיר לאחר שהוגרלו $X_1, \ldots, X_i$ ו־$Y_1, \ldots, Y_{i-1}$ (ונדאג לאי תלות של ההסתברויות עבור Y_i בערכים של $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$).

בהינתן הערכים $X_1 = \alpha_1, \ldots, X_{i-1} = \alpha_{i-1}$ ו־$p_i = \Pr[X_i = 1 | X_1 = \alpha_1, \ldots, X_{i-1} = \alpha_{i-1}]$, נבדוק עתה את ערך X_i. אם $X_i = 1$ אז נגדיר $Y_i = 1$, ואם $X_i = 0$ אז בהסתברות $\frac{11}{20(1-p_i)}$ נגדיר $Y_i = 0$ ובהסתברות $\frac{9-20p_i}{20(1-p_i)}$ נגדיר $Y_i = 1$. הדבר לשים לב אליו הוא ש־Y_i יהיה שווה ל־1 בהסתברות $\frac{9}{20}$ באופן ב"ת בערכי $X_1, \ldots, X_{i-1}$ או ערכי $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$. לכן קבוצת כל ה־Y_i היא ב"ת (במובן שמתקיים למשל $\prod_{j=1}^{i} \Pr[Y_j = 1] = (\frac{9}{20})^i$). עתה ניתן לחסום את $\Pr[X > n]$ ע"י $\Pr[\sum_{i=1}^{2n} Y_i > n]$, וזה חסום ע"י $e^{-\Theta(n)}$ באמצעות חסימת סטיות גדולות.

באשר לגירסא הלא־סימטרית

לכל $1 \leq i \leq m$ נגדיר $x_i = 2\Pr[B_i]$, ונוודא את קיום תנאי הלמה הלוקלית הלא־סימטרית עבור $x_1, \ldots, x_m$.

$$x_i \prod_{\{i:ij \in E\}} (1-x_i) = 2\Pr[B_i] \prod_{\{j:ij \in E\}} (1-2\Pr[B_j]) \geq 2\Pr[B_i](1-2\sum_{\{j:ij \in E\}} \Pr[B_j]) \geq 2\Pr[B_i](1-\frac{1}{2}) = \Pr[B_i]$$

אי השוויון השמאלי הוא המקרה הפשוט ביותר של הכלה והפרדה (הוא גם מוכר מהכלל על איחוד מאורעות).
לבסוף, מכיוון שנתון $\Pr[B_i] < \frac{1}{2}$ לכל i, נקבל $\Pr[\bigwedge_{i=1}^{m} \neg B_i] \geq \prod_{i=1}^{m}(1 - 2\Pr[B_i]) > 0$.

צביעות חסכוניות

נבצע צביעה אקראית של הגרף G ב־k צבעים (אחר כך נקבע את ערך k, אבל כבר נניח שהוא לפחות 3), ונגדיר את המאורעות ה"רעים" על מנת להשתמש בלמה הלוקלית. ישנם שני סוגים של מאורעות כאלו.

- לכל קשת $uv \in E$ נגדיר את המאורע A_{uv} שהיא מונוכרומטית. מתקיים $\Pr[A_{uv}] = \frac{1}{k}$.
- לכל שני צמתים u, v, w שיש עבורם שכן משותף, נגדיר את המאורע B_{uvw} שלשלושתם אותו צבע. מתקיים $\Pr[B_{uvw}] = \frac{1}{k^2}$.

אנו נראה את קיום תנאי הלמה הלוקלית בגרסא הלא־סימטרית ה"נוחה לשימוש" שהוכחה בשאלה הקודמת. ההסתברות של כל מאורע ומאורע קטנה מ־$\frac{1}{2}$ עבור $k \geq 3$, עתה נבדוק לכל סוג מאורע את קיום התנאי השני.

מאורע A_{uv} מהסוג הראשון יהיה בפרט בלתי תלוי באלגברה הנוצרת ע"י כל המאורעות המתייחסים אך ורק לצבעים של הצמתים $V \setminus \{u\}$. יש לכל היותר $\Delta - 1$ מאורעות שמתיחסים ל־u מהסוג הראשון (לא כולל A_{uv} עצמו) ו־$\Delta\binom{\Delta-1}{2}$ מאורעות שמתיחסים ל־u מהסוג השני. לכן צריך להתקיים $\frac{\Delta-1}{k} + \frac{\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)}{2k^2} \leq \frac{1}{4}$, וזה מתקיים בפרט לכל $k \geq \max\{2\Delta^{3/2}, 128\}$.

מאורע B_{uvw} מהסוג השני יהיה בלתי תלוי באלגברה הנוצרת ע"י כל המאורעות שאינם מתיחסים ל־u או v. מאורעות שמתיחסים ל־u או v יש לכל היותר 2Δ מהסוג הראשון, ו־$2\Delta\binom{\Delta-1}{2}$ מהסוג השני (יש כאן קצת ספירה כפולה של מאורעות). לכן צריך להתקיים $\frac{2\Delta}{k} + \frac{\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)}{k^2} \leq \frac{1}{4}$, וזה יתקיים למשל לכל $k \geq \max\{8\Delta^{3/2}, 64\}$.

סה"כ, על מנת שהלמה הלוקלית תתן לנו סיכוי חיובי שאף אחד מהמאורעות המוגדרים לא יתקיים (ואז הצביעה היא כנדרש) ניתן למשל להציב $k = \max\{8\Delta^{3/2}, 128\} = \Theta(\Delta^{3/2})$.

תרגיל רביעי

השמה מורעשת

נייצג בפונקציה $f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}$ את מה שהוגרל: $f(i)=1$ אם המשתנה ה־i נבחר להיפוך ערכו ו־$f(i)=0$ אחרת. נבצע חשיפה של f איבר איבר, $\mathcal{D}_i=\{1,\ldots,i\}$, ונגדיר את מרטינגל החשיפה המתאים עבור מספר הפסוקיות המסתפקות: X_i הוא תוחלת הפסוקיות המסתפקות בהשמה החדשה, מותנית על הידע באשר להיפוכים שנעשו ב־i המשתנים הראשונים. מתקיים כאן תנאי ליפשיץ עם c במקום 1: אם שתי השמות למשתנים נבדלות רק במשתנה אחד (וזה מתאים ל־f_1,f_2 הנבדלות רק על הערך עבור $\{i\}=\mathcal{D}_i\setminus\mathcal{D}_{i-1}$) אז מספר הפסוקיות המסתפקות משתנה בלא יותר מ־c. לכן $|X_i-X_{i+1}|\le c$ לכל $0\le i<n$.

ההסתברות שפסוקית נתונה תופר חסומה ע"י p (יש רק השמה לא מספקת אפשרית אחת לפסוקית, ובמקרה הכי גרוע ההשמה שהתחלנו אתה נמצאת "אחד ליד" ההשמה הלא־מספקת). לכן $X_0\le(1-p)\,m$. כך, מאי שוויון אזומה מקבלים $\Pr\left[X_0-X_n\ge\lambda c\sqrt{n}\right]<e^{-\lambda^2/2}$. נבחר $\lambda=pm/\sqrt{n}$ ונשים לב שתמיד מתקיים $n\le cm$, ונקבל $\Pr\left[X_0-X_n\ge cpm\right]\le e^{-p^2m^2/2n}\le e^{-p^2n/2c^2}$.

לא הסתברות אבל טוב לדעת

ההוכחה היא באינדוקציה על $|I|$. המקרה $|I|=1$ ברור. עבור המעבר מ־$|I|=k$ ל־$|I|=k+1$, נקבע $e\in I$. מתקבל (כאשר קודם משתמשים במודולריות, אח"כ בפילוג של פעולות קבוצות, ולבסוף בהנחת האינדוקציה):

$$\begin{aligned}
\alpha(\bigcup_{i\in I}A_i) &= \alpha(\bigcup_{i\in I\setminus\{e\}}A_i\cup A_e)\\
&= \alpha(\bigcup_{i\in I\setminus\{e\}}A_i)+\alpha(A_e)-\alpha\left((\bigcup_{i\in I\setminus\{e\}}A_i)\cap A_e\right)\\
&= \alpha(\bigcup_{i\in I\setminus\{e\}}A_i)+\alpha(A_e)-\alpha\left(\bigcup_{i\in I\setminus\{e\}}(A_i\cap A_e)\right)\\
&= \sum_{\emptyset\ne J\subseteq I\setminus\{e\}}(-1)^{1+|J|}\left(\alpha(\bigcap_{j\in J}A_j)-\alpha(\bigcap_{j\in J}A_j\cap A_e)\right)+\alpha(A_e)\\
&= \sum_{\emptyset\ne J\subseteq I}(-1)^{1+|J|}\alpha(\bigcap_{j\in J}A_j)
\end{aligned}$$

טיול בגרף נאה

בגרף 3־רגולרי בעל n צמתים יש בדיוק $m=\frac{3}{2}n$ קשתות. עתה נחסום את ההתנגדות השקולה R_{st}. מכיוון שהגרף הוא 2־קשיר, קיימים בין s ל־t שני מסלולים זרים בצמתים. תוספת צמתים וקשתות יכולה רק להקטין את ההתנגדות השקולה, ולכן אפשר לחסום את ההתנגדות השקולה ע"י זו של שני המסלולים האלו בלבד. אם אורכיהם הם αn ו־βn בהתאמה, אז מהנוסחא עבור נגדים במקביל נקבל התנגדות שקולה של $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}n$. קצת אלגברה חוסמת את זה ע"י $\frac{\alpha+\beta}{4}n$, ומכיוון ש־$\alpha+\beta\le 1$ (המסלולים הם זרי צמתים פרט ל־s ו־t) קיבלנו $R_{st}\le\frac{1}{4}n$ ולכן $k_{st}=2mR_{st}\le\frac{3}{4}n^2$ כנדרש.

שוויון אצל קלייטמן

נבחר $S = \{1, \dots, k\}$ עבור $k \geq 2$ כל שהוא. נבחר את $\mathcal{A}$ להיות המשפחה $\{A \subseteq S | 1 \in A\}$ ואת $\mathcal{B}$ להיות $\{A \subseteq S | 2 \in A\}$. חישוב ישיר מראה עתה שמתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| = 2^{2k-2} = 2^{|S|}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$.

אי שוויון אצל קלייטמן

ההוכחה של אי שוויון קלייטמן משתמשת כזכור במשפט ארבעת הפונקציות על מנת להראות שמתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}||\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}|$. כמו בהוכחה המקורית מתקיים עבור שתי המשפחות המונוטוניות העולות $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, שלנו ידוע גם שהיא אינה ריקה (היא כוללת את S כי המשפחות המקוריות לא היו ריקות ולכן כללו את S).

עבור $\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}$ ידוע לנו שהיא אינה מכילה את הקבוצה הריקה, מכיוון ש־$\mathcal{A}$ וגם $\mathcal{B}$ מכילות אך ורק קבוצות מגודל גדול מ־$\frac{1}{2}|S|$, וחיתוך של כל שתי קבוצות כאלו אינו ריק. על כן $|\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}||\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}| < 2^{|S|}|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$, ובזאת סיימנו את ההוכחה.