תרגיל ראשון הגשה: 22.4.2018

אותו דבר והיינו הך (6 נקודות)

נגדיר שתי התפלגויות על קבוצת הפרמוטציות מעל $\{1,\ldots,n\}$.

התפלגות ראשונה: בוחרים פרמוטציה באופן יוניפורמי מתוך $n!$ האפשרויות.

התפלגות שניה: בוחרים פונקציה $f:\{1,\ldots,n\}\to[0,1]$ ע"י כך שכל $f(i)$ נבחר באופן יוניפורמי מהקטע הממשי $[0,1]$ באופן ב"ת בבחירות האחרות. בסיכוי 1 כל הערכים שנבחרו שונים זה מזה. מזה מגדירים את הפרמוטציה $\sigma=\sigma_f$ לפי זה ש־$\sigma_f(i)$ הוא גודל הקבוצה $\{j:f(j)\le f(i)\}$ (שימו לב שזה מספר בין 1 ל־n, כי הקבוצה הנ"ל תמיד כוללת את i).

הראו שבשני המקרים מדובר באותה התפלגות בדיוק (כתוב "הראו" ולא "הוכיחו" בגלל שאחת ההתפלגויות מבוססת על מרחב לא בדיד, אז כמובן שאתם לא נדרשים להגיע לפורמליות של תורת המידה).

קשה לכסות (9 נקודות)

נסתכל על ה"קוביה" $\{1,\ldots,n\}^k$. נניח ש־$A_1,\ldots,A_m$ קבוצה של תתי־קוביה "קטנות" של $\{1,\ldots,n\}^k$. זה אומר שלכל i מתקיים $A_i=A_i^{(1)}\times\cdots\times A_i^{(k)}$, כאשר כל $A_i^{(j)}\subset\{1,\ldots,n\}$ היא קבוצה חלקית ממש (לא שווה ל־$\{1,\ldots,n\}$). כמו כן נניח ש־$A_1,\ldots,A_m$ כולן זרות (זה **לא** אומר שעבור j קבוע הקבוצות $A_1^{(j)},\ldots,A_m^{(j)}$ הן זרות!). הראו שאם $m<2^k$ אז $\bigcup_{i=1}^m A_i\neq\{1,\ldots n\}^k$.

הדרכה: מגרילים באופן יוניפורמי וב"ת תתי קבוצות $B^{(j)}\subseteq\{1,\ldots,n\}$ תחת התנאי ש־$|B^{(j)}|$ הוא אי־זוגי. מנתחים את זוגיות החיתוך של $B=\prod_{j=1}^k B^{(j)}$ עם $\bigcup_{i=1}^m A_i$.

הערה: יש דוגמה נגדית עבור קבוצות A_i לא זרות, כבר במקרה $k=2$ ו־$n=3$. אתם מוזמנים לנסות למצוא אותה.

הולכים במעגלים (9 נקודות)

נתונה פרמוטציה $\sigma:\{1,\ldots n\}\to\{1,\ldots,n\}$. כידוע כל פרמוטציה ניתנת לפירוק באופן יחיד למעגלים זרים. לכם נתון שלפרמוטציה σ יש לפחות k מעגלים זרים בפירוק. כתבו (והוכיחו) אלגוריתם שבהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ מוצא את האינדכסים של מעגל שלם של σ (גם אינדכס בודד v שעבורו $\sigma(v)=v$ הוא "מעגל" לגיטימי). על האלגוריתם לעשות זאת תוך כדי שהוא קורא לא יותר מ־$O(1+(n/k)(\log(n/k))^2)$ ערכים של σ במהלך הריצה (זמן הריצה שלו גם יהיה כזה, אם מניחים שקריאת ערך ועדכון מונה הן פעולות שלוקחות $O(1)$).

רמז: כדאי בשלב ראשון לסמן ב־m_j את מספר המעגלים בפירוק שגודלם בין 2^j ל־$2^{j+1}-1$.

תרגיל שני הגשה: 21.5.2018

משחק בכובעים (6 נקודות)

נתונים n אנשים שכל אחד מהם חבוש בכובע בעל אחד מ־k צבעים. כל איש אמור לנחש את הצבע של עצמו כאשר הוא יכול לראות רק את צבעי הכובעים של כל אחרים, ומבלי שהוא שומע את הניחושים של האחרים (הניחוש הוא פונקציה דטרמיניסטית של מה שהאיש רואה, מותר פונקציות שונות לאנשים שונים). הראו שאין אסטרטגיה שמבטיחה יותר מ־$\lfloor n/k \rfloor$ ניחושים נכונים במקרה הגרוע ביותר.

הערה: זו חידה נחמדה (אבל לא קשורה לשיטות הסתברותיות) למצוא אסטרטגיה שבאמת מבטיחה את המספר הנ"ל של ניחושים נכונים לכל השמה של צבעי הכובעים.

רב־קרב תרנגולים (12 נקודות)

נתונים n תרנגולים במעגל (אפשר להניח ש־n גדול דיו, מספיק שהוא לפחות 5). בהתחלה כל התרנגולים בריאים, אבל בכל סיבוב כל תרנגול בריא בוחר אם לנקר את התרנגול מימינו או משמאלו באופן יוניפורמי וב"ת באחרים (יכול להיות ששני תרנגולים בריאים ינקרו זה את זה בו זמנית). תרנגול שכבר ניקרו אותו אינו מנקר יותר בסיבובים הבאים, אבל יכול להיות שתרנגול לידו ינקר אותו שוב.

התהליך מפסיק כשאין יותר שני תרנגולים בריאים (לא מנוקרים) זה ליד זה. הראו שתוחלת מספר התרנגולים הבריאים בסוף התהליך היא $n/6$.

הדרכה: כדאי להגדיר תרנגול כ"בטוח" אם הוא בריא, וכבר אין לידו תרנגול בריא. כדאי בתור שלב ראשון, וזה כבר **שווה 4 נקודות**, לחשב את תוחלת מספר התרנגולים הבטוחים שנשארו לאחר סיבוב הניקורים הראשון ואת תוחלת מספר התרנגולים הבריאים הלא־בטוחים שנשארו אז.

דו־קרב תרנגולים (רק למי שלא מגיש את השאלה הקודמת, 6 נקודות)

נתונים שני תרנגולים. בכל סיבוב כל אחר מהם בוחר, בהסתברות $\frac{1}{2}$ ובאופן ב"ת, האם לנקר את חברו. התהליך מפסיק לאחר שבוצע ניקור כל שהוא, ואז השאלה היא האם תרנגול אחד נשאר בריא או ששני התרנגולים נוקרו בו־זמנית. חשבו את הסיכוי שנשאר תרנגול בריא.

תרגיל שלישי ורביעי   הגשה: 29.7.2018

דו־קרב תרנגולים עייפים (6 נקודות)

שוב נתונים לנו שני תרנגולים. הפעם, בכל סיבוב, כל תרנגול שהוא עדיין בריא וערני בוחר באופן ב"ת אחת משלוש פעולות (כל אחת בהסתברות $\frac{1}{3}$): הוא יכול לא לעשות כלום, או לנקר את חברו (זה אפשרי גם אם התרנגול השני ישן), או ללכת לישון עד סוף התהליך. התהליך מסתיים כאשר שני התרנגולים ישנים ו/או מנוקרים. חשבו את הסיכוי שהתהליך יסתיים במצב שבו שני התרנגולים בריאים וישנים בשלווה.

תלויים באופן טוב (6 נקודות)

נתונים לנו משתנים $X_1,\ldots,X_m$, שכל אחד מהם מקבל ערכים ב־$\{-1,1\}$, אבל הם יכולים להיות תלויים זה בזה. נתון רק שלכל $1\le k\le m$ מתקיים $\Pr[X_k=1|X_1=a_1,\ldots,X_{k-1}=a_{k-1}]\le\frac{1}{2}$, לכל סדרת ערכים אפשרית $a_1,\ldots,a_{k-1}$. הוכיחו באופן פורמלי שגם כאן מתקיים $\Pr[X>a]<e^{-a^2/2m}$, כאשר מסמנים $X=\sum_{i=1}^m X_i$.

הערה: שימו לב למילה "פורמלי" למעלה, בשאלה זו אתם נדרשים להוכחה מוקפדת ומדוייקת.

מספרים מכוסים (6 נקודות)

הראו שלכל k קיים α_k עם התכונה הבאה: כאשר בוחרים באופן יוניפורמי וב"ת n מספרים מ־$\{1,\ldots,n\}$, הסיכוי שאין אף מספר שנבחר לפחות k פעמים חסום ע"י $2^{-\alpha_k n}$.

פרמוטציות מעורבבות (9 נקודות)

עבור פרמוטציה $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ נגדיר את הערבוביות $M(\sigma)$ להיות שווה לגודל הקבוצה $\{i>j:\sigma(i)<\sigma(j)\}$ (יוצא מספר בין 0 המתקבל עבור $\sigma(i)=i$ לבין $\binom{n}{2}$ המתקבל עבור $\sigma(i)=n+1-i$). הראו את **אחד** הדברים הבאים עבור פרמוטציה הנבחרת באופן יוניפורמי.

- **עבור 6 נקודות מתוך 9**, הראו שמתקיים הריכוז $\Pr[|M(\sigma)-\frac{1}{2}\binom{n}{2}|>2\lambda n^3]<2e^{-\lambda^2/2}$. אם אתם משתמשים בזה שתוחלת $M(\sigma)$ היא $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$, עליכם להראות שזה אכן מתקיים.
- **עבור מלוא 9 הנקודות**, הראו שמתקיים $\Pr[|M(\sigma)-\frac{1}{2}\binom{n}{2}|>\lambda\sqrt{\sum_{i=2}^n(2i-3)^2}]<2e^{-\lambda^2/2}$. אם אתם מחזקים למה שלמדתם בקורס, באופן שהוכחת הלמה החדשה כמעט זהה להוכחה של המקורית, אז מספיק לנסח את הלמה המחוזקת ולציין את זה.

הערה: הערבוביות זהה לאורך המינימלי של סדרת החלפות מהסוג $(i,i+1)$ שניתן להרכיב ממנה את σ. אתם מוזמנים לנסות להוכיח את זה (ההוכחה לא קשורה לשיטות הסתברותיות).

לא חוזרים לאחור (6 נקודות)

כדאי לפני פתרון השאלה לקרוא את תחילת החומר בחוברות ההרצאות והתרגולים על הילוכים מקריים, למרות שאפשר לפתור את השאלה ללא שימוש ישיר במשפטים משם.

בהינתן גרף $G=(V,E)$ שכל הצמתים שלו מדרגה 2 לפחות, נגדיר את ההילוך הלא־חזרתי על G בצורה הבאה: $X_0\in V$ נבחר לפי ההפלגות הסטציונרית, ז"א $\Pr[X_0=v]=d(v)/2|E|$. אחר כך $X_1\in V$ נבחר יוניפורמית מתוך $d(X_0)$ השכנים של הצומת שנבחר עבור X_0. לאחר מכן, בהינתן שכבר בחרנו את

$X_0, \ldots, X_{i-1}$ עבור $i > 1$, הערך של $X_i \in V$ נבחר באופן יוניפורמי מתוך השכנים של X_{i-1} פרט ל-X_{i-2} (סה"כ $d(X_{i-1}) - 1$ אפשרויות).

הראו שלכל i ההתפלגות הלא־מותנה של X_i היא עדיין זו הסטציונרית, ז"א $\Pr[X_i = v] = d(v)/2|E|$.

גן השבילים המתפצלים (12 נקודות)

נתון גרף G עם n צמתים, שכל הצמתים שלו מדרגה 2 לפחות, ועם דרגה ממוצעת $d = \frac{1}{n}\sum_{v \in V} d(v)$. כמו כן נתון שגודל המעגל הפשוט המינימלי בו הוא לפחות $2k + 1$. הראו שמתקיים $d(d-1)^{k-1} \leq n$.

הדרכה: כדאי להגדיר הילוך מקרי ללא חזרה לאחור $X_0, \ldots, X_k$ כמו זה שמופיע בשאלה הקודמת, ולנתח את האנטרופיה המותנית $\mathrm{H}[X_1, \ldots, X_k | X_0]$.

ניקוד חלקי: אם הולכים לפי ההדרכה, אז אפשר לקבל עד **6** נקודות על החסם $\mathrm{H}[X_1, \ldots, X_k | X_0] \leq \log(n)$ ועד **6** נקודות על החסם $\mathrm{H}[X_1, \ldots, X_k | X_0] \geq \log(d) + (k-1)\log(d-1)$.

הבהרה: כן, מותר להשתמש בתוצאת השאלה הקודמת גם אם לא הוכחתם אותה.