תרגיל ראשון   הגשה: 23.4.2017

רמזי עם איסורים (6 נקודות)

הראו שלכל k קיימים $R(k)$ ו־$\gamma(k) > 0$, כך שאם G הוא גרף עם $n > R(k)$ צמתים, ו־F היא קבוצה של לא יותר מ־$\gamma(k) \cdot \binom{n}{2}$ "זוגות אסורים" של צמתים של G (שיכולה להכיל קשתות ו/או לא־קשתות של G), אז או שיש ב־G קבוצה בעלת k צמתים שהיא קליק או שיש ב־G קבוצה בת k צמתים שאין בה קשתות, המקיימת הנוסף שאף אחד מזוגות הצמתים בקבוצה הנ"ל אינו איבר ב־F.

הערה: ללא החלק על $\gamma(k)$ ו־F המדובר הוא במשפט רמזי המקורי. מותר להשתמש במשפט המקורי גם מבלי להוכיח אותו.

קשתות לטווח קצר (6 נקודות)

נתון גרף דו־צדדי $G = (U, V, E)$, כאשר קבוצות הצמתים U ו־V שתיהן בגודל n, והקבוצה E בת αn^2 קשתות. עבור צומת $u \in U$ נסמן ב־$F_u \subseteq E$ את קבוצת הקשתות הנוגעות בשכנים של u (שימו לב שבפרט זה כולל גם קשתות מ־u עצמו). הראו שקיים u עבורו $|F_u| \geq \alpha^2 n^2$.

קירבה לדרגה קבועה (9 נקודות)

נתבונן בגרף המקרי $G(n,p)$ עבור $p = \alpha/n$ (כזכור, המדובר בגרף עם קבוצה V בעלת n צמתים, כך שכל זוג צמתים uv נבחר להיות בקבוצת הקשתות E בהסתברות p בדיוק, באופן ב"ת לחלוטין בבחירות של הזוגות האחרים). כמו כן נתונים β ו־γ, כולם גדולים מ־0. הראו את קיומו של d שתלוי ב־α, β, γ בלבד, כך שבסיכוי לפחות $1 - \gamma$ אפשר להסיר מהגרף עד βn קשתות, ולגרף שיוותר תהיה דרגה מקסימלית שאינה עולה על d.

רמז: אם בגרף כל שהוא מסירים את כל הקשתות שלפחות צומת אחד שלהן הוא בעל דרגה גבוהה מ־d, אז מקבלים גרף עם דרגה מקסימלית שאינה עולה על d (אפשר להקטין את דרגת המקסימום גם ע"י הסרת פחות קשתות, אבל השיטה הזו גם פשוטה וגם עובדת).

תרגיל שני הגשה: 28.5.2017

מרחב מדגם מוגבל מוטה (6 נקודות)

אנחנו מעוניינים במרחב הסתברות שעבורו מוגדרים משתנים מקריים $X_1,\dots,X_n$, כל שלכל i מתקיים $\Pr[X_i=0]=\frac{2}{3}$ ו־$\Pr[X_i=1]=\frac{1}{3}$, וכן המשתנים הנ"ל הם ב"ת בזוגות (לכל $i<j$ מתקיים ש־X_i ב"ת ב־X_j). הראו שיש מרחב כזה שמספר האיברים הכולל בו הוא פולינומי ב־n. אם הבניה עצמה נכונה, יתקבלו גם תשובות עם פחות פירוט מהמקובל בשאר הקורס.

תפישת קשתות (6 נקודות)

נניח ש־$G=(V,E)$ הוא גרף עם n צמתים, לפחות $n^{3/2}$ קשתות, ודרגה מקסימלית חסומה ע"י $10n^{1/2}$. נניח ש־$V'\subseteq V$ היא קבוצת צמתים מקרית שמוגרלת ע"י כך שכל $v\in V$ נבחר להיות ב־V' באופן ב"ת בהסתברות $n^{-1/2}$. הראו שבסיכוי $1-o(1)$, בתת הגרף המושרה על V' קיימות לפחות $(1-o(1))n^{1/2}$ קשתות. במילים אחרות, לכל $\gamma>0$, אם n גדול מספיק אז בסיכוי לפחות $1-\gamma$ יש בתת הגרף המושרה לפחות $(1-\gamma)n^{1/2}$ קשתות.

מפגש חברים (6 נקודות)

יהיו $X_1,\dots,X_n$ משתנים מקריים שכולם הוגרלו באופן יוניפורמי וב"ת מתוך $\{1,\dots,n\}$. הראו, לכל k קבוע, שבהסתברות $1-o(1)$ (עבור n הולך וגדל) יהיו k משתנים מבין אלו שקיבלו ערך זהה.

השאלה "דרגה, צביעה, מותן" נדחתה לתרגיל השלישי

תרגיל שלישי   הגשה: 25.6.2017

דרגה, צביעה, מותן (9 נקודות)

הראו לכל k קבוע, ולכל n גדול מספיק (ביחס ל־k), שאפשר למצוא גרף עם n צמתים, ודרגה חסומה ע"י קבוע d (תלוי ב־k), כך שאין לו k־צביעה וגם אין בו מעגלים מגודל קטן מ־$C \log n$, עבור קבוע $C > 0$ מתאים (גם תלוי ב־k).

הערה ורמז: אחת השאלות מהתרגיל הראשון יכולה לעזור. במידה ואתם משתמשים בה, לא חובה לכתוב מחדש את הוכחת הטענה שלה (אפשר רק לצטט אותה).

גרף ופרמוטציה (9 נקודות)

נתון גרף $G = (V, E)$ עם $|V| = n$ ו־$|E| = \alpha n^2/2$. מגרילים פרמוטציה $\sigma : V \to V$ באופן יוניפורמי מתוך $n!$ האפשרויות. אנחנו מעונינים בגודל $X = |\{v \in V : (v, \sigma(v)) \in E\}|$. הראו שלכל $a > 0$ מתקיים $\Pr[|X - \alpha n| > a] < 2e^{-a^2/Cn}$, עבור קבוע גלובלי מתאים C.

הערה: אם אתם מוכיחים חסם על ההפרשים של מרטינגל חשיפה עבור הפרמוטציה σ, לא לשכוח שזו **לא** ניתנת לתיאור כבחירה ב"ת של כל ערך $\sigma(v)$ לחוד.

תרגיל רביעי   הגשה: 10.8.2017

חלוקה בנטל (9 נקודות)

הראו שלכל k קיים קבוע C_k עם התכונה הבאה: נניח ש־$G = (V, E)$ הוא גרף מכוון, עם דרגת כניסה חסומה ע"י k (ז"א שאף צומת אינו צומת יציאה של יותר מ־k צמתים עם קשת אליו). ניתן אז לחלק את קבוצת הצמתים של G לשתי קבוצות V_1 ו־V_2, כך שגם בגרף המושרה על V_1 וגם בגרף המושרה על V_2, כל צומת v שדרגת היציאה שלו ב־G היתה $d(v) \geq C_k$, דרגת היציאה שלו בגרף המושרה המתאים תהיה בין $\frac{1}{3}d(v)$ לבין $\frac{2}{3}d(v)$.

הערה: אם משתמשים בלמה הלוקלית, אין להוציא מכלל אפשרות שיהיה צריך את הגרסה הכי כללית שלה.

שימוש באי שוויון פינסקר (9 נקודות)

נתון ש־X ו־Y הם שני משתנים מקריים מעל מרחב הסתברות בדיד, שמקבלים את כל ערכיהם בטווח הממשיים $[0, 1]$. הראו שמתקיים $|\mathrm{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{I}[X, Y]}$.

הערה: כמו ששם השאלה מרמז, מומלץ לכם לברר מהו אי שוויון Pinsker ולהשתמש בו.

שאלה קלה על מאמר קשה (4 נקודות)

המאמר המקורי של Pippenger, Spencer (אפשר למצוא אותו ברשת) מוכיח בשיטת הכרסום של רודל לא רק את המשפט שראינו בכיתה, אלא משפט כללי יותר חזק (בעצם הם משתמשים בבניה של המשפט כולו כאלמנט במה שהם קוראים "נגיסה אנכית", בדרך למשפט הסופי שלהם). עם זאת, התנאים שם ביחס לאחד מהמאפיינים של הגרף הם יותר חזקים מהתנאים המספיקים למשפט מהכיתה. כתבו ניסוח מדוייק של המשפט הכללי שלהם וציינו את ההבדל בתנאים.

הערה: "העתק־הדבק" ישיר מהמאמר שלהם לא יתקבל בברכה, צריך לנסח את זה במושגים של הקורס.