תרגיל ראשון הגשה: 16.11.2015

הגעה מהוססת (6 נקודות)

מגרילים משתנים מקריים $X_1, X_2, \ldots$, כולם בלתי תלויים ויוניפורמים מתוך $\{0,1\}$. נסמן ב־T_k את המספר הקטן ביותר עבורו מתקיים $\sum_{t=1}^{T_k} X_t \geq k$. במילים אחרות, זהו ה"זמן" שבו מגיעים למספר k אחרי שבכל שלב מחליטים הסתברות $\frac{1}{2}$ אם נשארים במקום או עולים ב־1. חשבו את התוחלת $\mathrm{E}[T_k]$.

רמז: חישוב הפרש מסויים יכול לעזור.

מספר בהגרלה (8 נקודות)

מגרילים ייצוג בינארי של מספר באופן הבא: מתחילים מ"מספר" בן 0 ספרות (אשר נחשב לייצוג אפשרי של המספר 0). בכל שלב בהסתברות p מסיימים ובהסתברות $1-p$ ממשיכים. אם ממשיכים, אז בהסתברות q כותבים "1" ובהסתברות $1-q$ כותבים "0", ואז ממשיכים לשלב הבא. כל ההגרלות נעשות באופן בלתי תלוי בהגרלות קודמות. שימו לב שאם $p > 0$ אז בהסתברות 1 התהליך הנ"ל מתי שהוא ייעצר. מיצאו (עם הוכחה כמובן) עבור אלו ערכים של p ו־q תוחלת המספר המתקבל היא סופית.

לא כל הדרכים מובילות (6 נקודות)

הילוך מקרי מצומת s בגרף G (שיכול להיות מכוון) מוגדר באופן הבא: המשתנה המקרי X_0 (שמקבל ערכים מתוך קבוצת הצמתים של הגרף) יקבל בהסתברות 1 את הצומת s. המ"מ X_1 יקבל שכן של s שנבחר באופן יוניפורמי מקבוצת השכנים האפשריים. ובהמשך, לאחר בחירת ערך X_{i-1}, המ"מ X_i יקבל צומת שנבחר יוניפורמית מקבוצת השכנים של הערך של X_{i-1}, כאשר כל הגרלה נערכת באופן ב"ת בהגרלות קודמות.

נסמן ב־T_v את זמן ההגעה הראשון לצומת v, ז"א את המספר הכי נמוך עבורו $X_{T_v} = v$. למשל, ברור שמתקיים $X_s = 0$ בהסתברות 1. הראו שלכל גרף קיים v עבורו $\mathrm{E}[T_v] = \Omega(n)$, כאשר n מציין את מספר הצמתים בגרף.

חשוב: שימוש בניתוח מתקדם של הילוך מקרי כפי שנלמד בסוף הקורס לא יתקבל בברכה, ולא הכל שם עובד לגרפים מכוונים ממילא.

רמז: אי שוויון מרקוב יכול לעזור באחד השלבים.

תרגיל שני הגשה: 21.12.2015

בידוד בלי ידיעה (9 נקודות)

נתונה קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\{1,\ldots,m\})$, ואתם צריכים בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ לספק עבורה פונקצית משקל $w : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ כך שתהיה $F \in \mathcal{F}$ יחידה עם משקל מינימלי. הבעיה היא שלא אומרים לכם מראש מהי $\mathcal{F}$ ואפילו לא מהו m. האלגוריתם צריך לספק את $w(i)$ כל פעם שנשאל על המשקל של i כל שהוא, ולעולם לא לתת מספר גדול מאיזה שהוא פולינום קבוע ב־m (אתם קובעים את הפולינום).

נסחו את הלמה הדרושה בשביל אלגוריתם כזה, תארו איך אתם מוכיחים אותה (מספיק לתאר את הנקודות בהן ההוכחה היא לא כמו ההוכחה של למת הבידוד הרגילה), ותארו את האלגוריתם ומדוע הוא עובד.

מסכלי המשוואות (9 נקודות)

נתונה קבוצה A של n נקודות שונות זו מזו במרחב $(\mathbb{Z}_p)^m$ (זהו המרחב הלינארי ה־m מימדי מעל השדה של השלמים מודולו p; מניחים ש־p ראשוני), ונתון $\delta > 0$. הראו שמתקיימת התכונה הבאה עבור p ו־n גדולים מספיק (מותר לדרישה מ־n להיות תלויה ב־p; אין לדרוש כלום מ־m, רק שיהיה גדול מספיק כדי שבאמת יהיו לפחות n נקודות שונות במרחב שלנו):

הראו שקיימת אז קבוצה של משוואות לינאריות (כל אחת מהצורה "$u \cdot v = b$" עבור וקטור $u \in (\mathbb{Z}_p)^m$ וסקלר $b \in \mathbb{Z}_p$ מתאימים, כאשר v הוא ווקטור הנעלמים) כך שמספר הנקודות מ־A שאינן פותרות אף משוואה נמצא בתחום $(\frac{1}{2} \pm \delta)n$. על המערכת להיות עם $O(p \log n)$ משוואות.

רמז: אפשר לבנות בשלבים.

הערה לניקוד: בניה טובה ללא הגבלה על מספר המשוואות (לא בטוח שזה מקל הרבה) תקבל 6 נקודות.

תרגיל שלישי הגשה: 18.1.2015

מחפשים את הקשר (8 נקודות)

נרצה להפעיל אלגוריתם על גרף אשר הוגרל לפי $G(n,p)$, כאשר $p \geq \frac{\alpha \ln n}{n}$ עבור $\alpha > 1$ קבוע כל שהוא (הגרף אקראי, האלגוריתם דטרמיניסטי). האלגוריתם לא יודע מראש את G ויכול לבצע שאילתות מהצורה "האם uv היא קשת בגרף?" (מותר לשאילתות להיות תלויות בתשובות שהאלגוריתם קיבל לשאילתות קודמות). הראו שקיים אלגוריתם אשר בהסתברות $1-o(1)$ מוצא תת־גרף קשיר פורש לאחר ביצוע $(1+o(1))n/p$ שאילתות. בפרט הדבר מוכיח שעם p כזה הגרף יהיה קשיר בהסתברות $1-o(1)$ (ידועים גם חסמים יותר מדוייקים על ה־p עם התכונה הנ"ל).

הבהרה: המשמעות הפורמלית של סימוני ה־$o(1)$ היא שלכל δ ו־ϵ גדולים מ־0 מראים שאם n גדול מספיק (בהינתן הערכים הנ"ל), אז בהסתברות לפחות $1-\delta$ האלגוריתם ימצא את תת הגרף הקשיר לאחר ביצוע של לא יותר מ־$(1+\epsilon)n/p$ שאילתות.

רמז: כדאי לנסח אלגוריתם שמגיע לתוצאה הרצויה לאחר צבירת מספר קטן ככל האפשר של תשובות מהסוג "זו כן קשת".

זיווגים ומקריות (10 נקודות)

נסתכל על גרפים אשר מוגרלים לפי $G(n,1/n)$. הראו כי קיימים $\alpha(n)$, כולם חסומים מלמטה ע"י קבוע גלובלי $\alpha > 0$, כך שבהסתברות $1-o(1)$ גודל הזיווג המקסימלי בגרף הוא $(1 \pm o(1))n \cdot \alpha(n)$.

הערות: לא חייבים להוכיח שיש גבול לפונקציה $\alpha(n)$, אבל לא לשכוח להראות גם את החסם התחתון הגלובלי על $\alpha(n)$, זה שווה חצי מהנקודות של השאלה. לא לשכוח נימוקים, לא הכל "קל לראות".

תרגיל רביעי   הגשה: 28.2.2015

פיצול גרף (8 נקודות)

נתון גרף G עם קבוצת צמתים $V = \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ ובעל דרגה מקסימלית לכל היותר d. הראו שקיימת קבוצה $U \subset V$ כך ש־U מכילה צומת אחד בדיוק מכל זוג $\{v_i, v_{i+n}\}$ (בפרט זו קבוצה בת n צמתים), כך שגם תת הגרף המושרה על U וגם זה המושרה על $V \setminus U$ הם בעלי דרגה מקסימלית לכל היותר $d/2 + O(\sqrt{d \log d})$.

לא תרבו (8 נקודות)

נתונה קבוצת מילים $C \subseteq \{0,1\}^n$. עבור $\alpha > 0$ נתון שלכל קבוצת אינדכסים $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ המקיימת $|I| \leq \alpha n$ קיימת מילה $w = w_1, \ldots, w_n \in C$ המתאפסת על כל האינדכסים ב־I, ז"א $w_i = 0$ לכל $i \in I$. כמו כן, נתון שקיים מרחב הסתברות μ מעל $\{1, \ldots, n\}$, כך שאם i הוא אינדכס הנבחר לפי מרחב הסתברות זה, אז לכל $w = w_1, \ldots, w_n \in C$ מתקיים $\Pr[w_i = 1] \geq \frac{9}{10}$. הראו שקיים $\beta > 0$ התלוי ב־α בלבד, שעבורו מתקיים $|C| \leq 2^{(1-\beta)n}$.

מטלת קריאה: זמני פגיעה וביקור (4 נקודות)

קראו את המשך ההרצאות על חישוב זמני ביקור של הילוך מקרי. בפרט אפשר לראות שם דוגמה לגרף עם שני צמתים שזמן הפגיעה ביניהם גדול מזמן הפגיעה בתת גרף מושרה המכיל אותם ("גרף הסוכריה" שהוא הדוגמה האחרונה בסוף החוברת, וגרף המסלול שהוא תת גרף מושרה שלו). הראו דוגמה בכיוון ההפוך, שבו זמן הפגיעה בתת הגרף המושרה גדול יותר (מספיק דוגמא של גרף אחד ספציפי, עיקר המטלה זו הקריאה). תנו הסבר קצר מדוע זה מתיחס לזמן הפגיעה, לא רק לזמן הביקור.

הילוך לשום־מקום (6 נקודות)

נתון הילוך מקרי על הגרף האינסופי של ציר המספרים השלמים: כל מספר i מחובר בקשת (לא מכוונת) למספר $i-1$ ולמספר $i+1$. נתון הילוך מקרי היוצא מהנקודה "1". הראו שהזמן הממוצע שיעבור עד שיגיע לנקודה "0" הוא אינסופי.

הערה: אפשר להוכיח זאת רק על סמך הגדרות ההילוך (אפשר לנסות לקבל השראה מכמה מההוכחות בחוברת ההרצאות, וכן מהתרגיל "קשיים בהתקדמות" מחוברת התרגילים הפתורים), או להשתמש בחומר היותר מתקדם על הילוכים מקריים מחוברת ההרצאות (שבכל מקרה מומלץ לקרוא אותו). במקרה השני יש להקפיד קצת יותר על ההוכחה, כי בכל זאת החומר בחוברת מתיחס לגרפים סופיים בלבד.