תרגיל ראשון   הגשה: 12.11.2013

הוכחה של דבר ברור (8 נקודות)

תהא $N=\{1,\ldots,n\}$ ותהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(N)$ משפחה מונוטונית עולה, לא ריקה ולא שווה ל־$\mathcal{P}(N)$, של תתי קבוצות (ז"א שאם $A\in\mathcal{A}$ ו־$A\subset B$ אז $B\in\mathcal{A}$). לכל $0<p<1$ נסמן ב־μ_p את מרחב ההסתברות מעל $\mathcal{P}(N)$ שבו מגרילים $R\subseteq N$ ע"י כך שלכל $i\in\{1,\ldots,n\}$, נבחר אותו להיות איבר ב־R בהסתברות p, באופן ב"ת לחלוטין במה שנבחר לכל $j\neq i$.

הוכיחו כי לכל $p<q$ מתקיים $\Pr_{\mu_p}[R\in\mathcal{A}]<\Pr_{\mu_q}[R\in\mathcal{A}]$. צריך הוכחה, לא רק "הסבר" מדוע זה "ברור", ויש לשים לב גם לכך שאי השוויון המבוקש הוא חד (הוכחה של "קטן או שווה" תזכה ב־6 נקודות).

פרמוטציה בהגרלה (8 נקודות)

נגריל פרמוטציה $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ באופן יוניפורמי מתוך $n!$ הפרמוטציות האפשריות. הראו לכל $k<n/2$ שהסיכוי שלא יהיה קיים שום i עבורו $|\sigma(i)-i|<k$ הוא לפחות $c_kn^{-\Theta(k)}$ (עבור קבוע c_k מתאים התלוי ב־k). רמז: חוק Bayes יכול לעזור כאן.

טורניר עד הסוף (6 נקודות)

טורניר מעל קבוצת הצמתים V הוא גרף מכוון (V,E) (כאשר $E\subseteq V\times V$) כך שלכל שני איברים $u\neq v$ של V, בדיוק אחד מהזוגות (u,v) ו־(v,u) הוא איבר של E. הראו שקיים טורניר מעל $V=\{1,\ldots,n\}$ המכיל לפחות $n!2^{1-n}$ מסלולים מכוונים שונים מאורך n (מסלול כזה הוא סידור $\{v_1,\ldots,v_n\}$ של הצמתים כך ש־$(v_i,v_{i+1})\in E$ לכל $1\leq i<n$).

תרגיל שני   הגשה: 10.12.2013

אחרון חביב (8 נקודות)

נגריל סידרת קבוצות באופן האינדוקטיבי הבא: A_0 יהיה שווה (דטרמיניסטית) ל־$\{1,\ldots,n\}$ עבור $n>1$ כל שהוא, ולאחר שהגרלנו את A_i, נגריל מקרית את $A_{i+1}\subseteq A_i$ ע"י כך שלכל $a\in A_i$ נקבע בהסתברות $\frac{1}{2}$ ובאופן ב"ת בכל ההגרלות האחרות ש־$a\in A_{i+1}$. הראו שיש חסם תחתון גלובלי (לא תלוי n) על ההסתברות שקיים j כל שהוא כך ש־A_j בת איבר אחד בדיוק. בשביל לקבל את כל הנקודות צריך הוכחה מלאה ללא "נפנוף ידיים".

העיקר האיזון (4 נקודות)

הראו שלכל $\epsilon>0$ קיים N_ϵ, כך שלכל $n>N_\epsilon$ ולכל מערכת 3CNF מעל $x_1,\ldots,x_{2n}$ בעלת m פסוקיות קיימת הצבה המספקת לפחות $(\frac{7}{8}-\epsilon)m$ פסוקיות שיש בה בדיוק n ערכי 1 ו־n ערכי 0.

אינטרסים מנוגדים

גרסה מתוקנת של השאלה תופיע בתרגיל הבא.

תרגיל שלישי   הגשה: 23.1.2014

הערה חשובה: התרגיל הראשון הוא בעל 12 נקודות עם אפשרות לפתור גרסה "מוקטנת" בת 8 נקודות של התרגיל. מי שמגיש פתרון לגרסה בת 8 הנקודות של התרגיל (ומציין זאת במפורש) יוכל בתרגיל הרביעי להגיש פתרון עבור 4 הנקודות הנותרות.

אינטרסים מנוגדים – הגרסה המציאותית (12 נקודות)

הראו שלכל $\epsilon > 0$ ו־$\delta > 0$ קיים $N_{\epsilon,\delta}$, כך שלכל $n > N_{\epsilon,\delta}$ מתקיים הדבר הבא: נניח ש־$C_1, \ldots, C_m$ ו־ $C'_1, \ldots, C'_{m'}$ הן שתי מערכות 3CNF מעל $x_1, \ldots, x_n$ (כל הפסוקיות בנות בדיוק שלושה ליטרלים ללא הופעות כפולות של משתנים באותה פסוקית). נניח גם שאם סופרים את מספר הליטרלים המופיעים בפסוקיות של $C_1, \ldots, C_m$ ללא סימן שלילה (ספירה כולל חזרות) אז יש לפחות $(\frac{3}{2}+\delta)m$ כאלה, ושהמערכת $C'_1, \ldots, C'_{m'}$ "מפוזרת טוב": כל משתנה x_i מופיע בדיוק ב־$3m'/n$ פסוקיות מהמערכת (מניחים גם שזהו מספר שלם). הראו שבמצב כזה (כאשר $n > N_{\epsilon,\delta}$) קיימת הצבה למשתנים אשר מספקת לפחות $\frac{7}{8}m$ מהפסוקיות $C_1, \ldots, C_m$ ולפחות $(\frac{7}{8} - \epsilon)m'$ מהפסוקיות $C'_1, \ldots, C'_{m'}$.

הערה: קיים פתרון שלא משתמש בהגרלה עם תיקונים (אבל כמובן שאין איסור להשתמש בזה).

גרסה מוקטנת של 8 נקודות: מבלי להשתמש בנתון על הליטרלים של $C_1, \ldots, C_m$, יש להראות שניתן לספק לפחות $(\frac{7}{8} - \epsilon)m$ פסוקיות מ־$C_1, \ldots, C_m$ ו־$(\frac{7}{8} - \epsilon)m'$ פסוקיות מ־$C'_1, \ldots, C'_{m'}$ ע"י הצבה אחת למשתנים.

מעגלים זרים (6 נקודות)

נתון ש־G הוא גרף מכוון שבו לכל צומת דרגת כניסה ודרגת יציאה k. הראו כי קיימים בו $\Theta(k/\log(k))$ מעגלים מכוונים זרי צמתים. רמז: חלוקה עם תכונות טובות של קבוצת צמתי הגרף יכולה לעזור.

קבוצות ב"ת וסדר לקסיקוגרפי (8 נקודות)

נגדיר סדר לקסיקוגרפי על תתי קבוצות של $\{1, \ldots, n\}$: נסמן $A \prec B$ אם קיים $1 \le i \le n$ כך ש־$i \in B \setminus A$ אולם $A \cap \{1, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, \ldots, i-1\}$. שימו לב שזהו בעצם הסדר הלקסיקוגרפי על הפונקציות האופייניות של הקבוצות הנ"ל.

עבור גרף G מעל קבוצת הצמתים $\{1, \ldots, n\}$, נבחן את קבוצות הצמתים הב"ת. על קבוצות אלה מוגדרים לנו שני סדרים, הסדר הלקסיקוגרפי $\prec$ שהוגדר לעיל, וסדר ההכלה. הקבוצה הב"ת הראשונה בסדר לקסיקוגרפי היא זו הריקה. נסמן ב־L את הקבוצה הב"ת האחרונה בסדר הלקסיקוגרפי $\prec$, ז"א את הקבוצה המקיימת $A \prec L$ לכל קבוצה ב"ת A השונה מ־L. שימו לב שבפרט L תמיד תהיה מקסימלית בהכלה.

הראו לכל $p \in (0,1)$ ולכל $\lambda > 0$ כי עבור גרף הנבחר לפי $G(n,p)$, ההסתברות שגודל L יבדל ביותר מ־$\lambda\sqrt{n}$ מתוחלת הגודל של L חסומה ע"י $O(e^{-\lambda^2/2})$.

הערה: אפיונים (הגדרות אלטרנטיביות שקולות) של הקבוצה המדוברת יכולים לעזור.

תרגיל רביעי   הגשה: 23.2.2014

אינטרסים מנוגדים – השלמות (4 נקודות)

אם לא הגשתם את הגרסה המלאה של השאלה בתרגיל הקודם, באפשרותכם עתה להגיד פתרון עבור 4 הנקודות הנותרות. בפתרון מותר להתייחס לפתרון הגרסה המוקטנת של השאלה שהגשתם, או לפתרון הרשמי של גרסה זו (ז"א שמספיק להוכיח את ה"הפרש" בין הפתרונות לשאלות המתאימות).

קבוצה ב"ת וסדר לקסיקוגרפי – נסיון נוסף (4 נקודות)

אם לא הגשתם את השאלה בתרגיל הקודם (או הגשתם פתרון שזכה לפחות מ־4 נקודות), ניתן להגיש את הפתרון עבור 4 נקודות (במקום ההגשה הקודמת) לאור ההדרכה הבאה: נשים לב ש־L היא הקבוצה הב"ת המתקבלת מהפעלת האלגוריתם החמדן לפי סדר הצמתים. בונים עבור גודל הקבוצה L מרטינגל חשיפת צמתים. ההפרש $\mathcal{D}_i \setminus \mathcal{D}_{i-1}$ יכול לקבוע האם הצומת i יהיה ב־L, לאחר שהצמצום ל־$\mathcal{D}_{i-1}$ קבע את $L \cap \{1, \ldots, i-1\}$. עם זאת לא מתקיים תנאי ליפשיץ קומבינטורי מתאים (יכול להיות שתוספת הצומת i תשנה הרבה מאוד להמשך), ולכן יש להוכיח את תנאי ליפשיץ עבור המרטינגל באופן ישיר. צריך אם כן להראות שתוחלת מספר הצמתים ש"יצטרפו בהמשך" אינה משתנה באופן גדול מדי עקב השאלה האם i נכנס לקבוצה או לא.

עוד משהו על קבוצה ב"ת וסדר לקסיקוגרפי (6 נקודות)

עבור גרף המוגרל לפי $G(n, \frac{1}{2})$, הראו שבהסתברות $1 - o(1)$ גודל הקבוצה L, כפי שהוגדרה בשאלה על הקבוצות הב"ת והסדר הלקסיקוגרפי, הוא $\Omega(\log n)$ (דרך אגב, שימו לב שהוא גם $O(\log n)$ לפי מה שנלמד בתחילת הקורס על משפט רמזי).

הערה: כדאי לזכור כאן שהעובדה שהשאלה מופיעה בתרגיל האחרון אינה בהכרח אומרת שצריך להשתמש בשיטה קומבינטורית שנלמדה מאוחר בקורס (ו/או שיטה זהה לזו של השאלה הקודמת העוסקת בקבוצות כאלו). מומלץ גם לא לשכוח את הקשר של L לאלגוריתם החמדן.

הטלות מישוריות (6 נקודות)

תהא $A \subseteq \mathbb{R}^3$ קבוצה בת n נקודות. נניח כי ההטלה (האורתוגונלית) של הקבוצה A על המישור yz נותנת לנו n_x נקודות שונות, ההטלה על המישור xz נותנת לנו n_y נקודות שונות, וההטלה על המישור xy נותנת לנו n_z נקודות שונות. הוכיחו כי מתקיים $n^2 \leq n_x n_y n_z$.

צעידה על הקוביה (6 נקודות)

נתון ההילוך המקרי הבא על הקוביה הבוליאנית $\{0,1\}^n$ (למעשה זו שרשרת מרקוב, בגלל שיש הסתברות חיובית להישארות במקום – אפשר להסתכל על זה כעל הילוך מקרי על גרף מתאים עם לולאות): X_0 הוא בהסתברות 1 הווקטור 0^n. לאחר בחירת X_i, בהסתברות $\frac{1}{n+1}$ משאירים $X_{i+1} = X_i$, ובהסתברות $\frac{n}{n+1}$ בוחרים באופן מקרי ויוניפורמי קורדינטה אחת שבדיוק בה X_{i+1} יהיה שונה מ־X_i. הראו שלאחר $O(n \log n)$ צעדים (עבור מקדם מתאים ב־"O") המרחק בין התפלגות X_i (הלא־מותנה) לבין ההתפלגות הסטציונרית (שהיא ההתפלגות היוניפורמית על הקוביה) יהיה $o(1)$.

הערה: לא קשה לנחש ששיטה אפשרית להוכיח זאת היא באמצעות צימוד מתאים.