תרגיל ראשון הגשה: 15.4.2012

מקרי בריבוע (4 נקודות)

נתון אלגוריתם אקראי A המקבל קלט ב־$[n]$ (סימון ל־$\{1,\ldots,n\}$). ידוע כי כאשר ההסתברות נלקחת מעל קלט שנבחר באופן מקרי בהתפלגות יוניפורמית ומעל האקראיות של האלגוריתם, ההסתברות ש־A מצליח היא לפחות $2/3$. הוכיחו כי אם נבחר באקראי באופן יוניפורמי $k \in [n]$, אז בהסתברות לפחות $1/3$ נקבל k כזה כך שהאלגוריתם מצליח עליו בהסתברות לפחות $1/2$.

שידוך בגרף מקרי (6 נקודות)

נבנה גרף מקרי על $2n$ צמתים באופן הבא: הקבוצות L,R שתיהן בנות n צמתים. כל צומת ב־L בוחר באקראי ובאופן ב"ת בצמתי Lהאחרים בדיוק $\frac{n}{100}$ שכנים ב־R. הראו כי בהסתברות $1-o(1)$ יש בגרף שידוך מושלם.

עגילים גדולים (6 נקודות)

נבחר פרמוטציה אקראית σ מעל $[n]$. הראו כי קיימים קבועים c_1,c_2 כך שבהסתברות לפחות c_1, האיבר 1 נמצא בעגיל באורך לפחות c_2n (עגיל בפרמוטציה הוא קבוצה מהצורה $\{a,\sigma(a),\sigma(\sigma(a)),\ldots,\sigma^{(l-1)}(a)\}$, כאשר כל האיברים שונים זה מזה אולם $\sigma^{(l)}(a)=a$).

גרף מקרי ויחיד (8 נקודות)

נגדיר את משפחת ההתפלגויות על גרפים אינסופיים $G\left(\mathbb{N},p\right)$ באופן הבא – קבוצת הצמתים של הגרף היא $\mathbb{N}$, ולכל $i<j\in\mathbb{N}$, קשת (לא מכוונת) תחבר ביניהם בהסתברות p באופן ב"ת בזוגות האחרים. הראו כי ששני גרפים G ו־H הנבחרים באופן ב"ת לפי ההתפלגות $G\left(\mathbb{N},\frac{1}{2}\right)$ הם איזומורפיים בהסתברות 1. איזומורפיזם כאן הוא פונקציה חח"ע ועל בין קבוצות הצמתים (האינסופיות) שמקיימת את התנאי הרגיל ש־u,v היא קשת אם ורק אם $f(u),f(v)$ היא קשת.

הדרכה: קודם הוכיחו שמתקיים עבור גרף מקרי כזה התנאי הבא בהסתברות 1: לכל קבוצת צמתים סופית U ולכל $U'\subseteq U$, קיים צומת כל שהוא $v\notin U$ כך ש־U' כולם שכניו ו־$U\setminus U'$ כולם לא־שכניו.

תרגיל שני   הגשה: 20.5.2012

קליק ממוצע (9 נקודות)

נבחר גרף לפי $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$. הראו כי בהסתברות של לכל היותר $e^{-\Theta(n)}$ מספר ה־k־קליקים בגרף יהיה יותר מ־$\binom{n}{k}\cdot 2^{-\binom{k}{2}+1}$ או פחות מ־$\binom{n}{k}\cdot 2^{-\binom{k}{2}-1}$.

רמז: אפשר לקבל קצת השראה מאחת השאלות מהתרגיל הקודם (למרות שזו לא אותה הוכחה).

ריכוז במרחב (9 נקודות)

נביט במרחב הוקטורי $\mathbb{Z}_p^n$ (מעל השדה $\mathbb{Z}_p$) עבור $p\geq 3$ ראשוני ו־$n\geq 2$. נתונה קבוצה $A\subseteq \mathbb{Z}_p^n\setminus\{0\}$ כך ש־$|A|=\frac{p^n-1}{2}$. נבחר תת מרחב U ממימד 2 יוניפורמית. הראו, עבור p גדל ובאופן ב"ת ב־n, כי בהסתברות $1-o(1)$ מתקיים שגודל החיתוך $A\cap U$ הוא בין $\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)(p^2-1)$ לבין $\left(\frac{1}{2}-o(1)\right)(p^2-1)$.

קבוצות שוות סכום (6 נקודות)

הציעו אלגוריתם יעיל (פולינומי ב־n) שבהנתן קבוצה $A\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ כך ש־$|A|\geq \log n+\frac{\log\log n}{2}+10$ ימצא שתי תתי קבוצות שונות $B,B'\subseteq A$ כך ש־$\sum_{b\in B} b=\sum_{b'\in B'} b'$. כמובן שיש להסביר מדוע הוא עובד.

תרגיל שלישי   הגשה: 26.6.2012

משתנים תלויים בשרשרת (6 נקודות)

נניח ש־$X_1,\ldots,X_n$ הם משתנים מקריים המקבלים ערכים ב־$\{0,1\}$, ושכל X_i עבור $i>1$ נבחר באופן שיכול להיות תלוי בערך של X_{i-1} בלבד, זאת אומרת שלכל $b_1,b_2,\ldots,b_n$ מתקיים:

$$\Pr[X_i=b_i|X_1=b_0,\ldots,X_{i-1}=b_{i-1}]=\Pr[X_i=b_i|X_{i-1}=b_{i-1}]$$

מפתה לשער שבמקרה זה קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, שיכולים להיות תלויים בהתפלגויות של ה־X_i (לדוגמה, תוחלת סכומם), כך שלכל $\beta>0$ מתקיים $\Pr[\min_{1\le j\le k}|\sum_{i=1}^n X_i-\alpha_j|>\beta n]<e^{-\Theta(n)}$ כאשר k הוא קבוע גלובלי (לא תלוי β) מתאים. הראו שהשערה זו איננה מתקיימת (למשל ע"י בניית דוגמה נגדית מתאימה וניתוחה).

חיתוך עם קבוצה מקרית (6 נקודות)

נתון ש־U היא תת קבוצה של $\{1,\ldots,2n\}$ המוגרלת באופן יוניפורמי מכל תתי הקבוצות האפשריות מגודל n בדיוק. הראו שמתקיים $\Pr[|U\cap\{1,\ldots,n\}|>\frac{1}{2}n+a]<e^{-ca^2/n}$ לכל $1\le a\le\frac{1}{2}n$, עבור קבוע גלובלי מתאים c. אם משתמשים במשפט ריכוז שלא נלמד במהלך קורס יש להוכיח גם אותו (יותר פשוט אבל להוכיח ישירות).

מילים לא חזרתיות (8 נקודות)

מילה $y\in\Sigma^{2m}$ נקראת חזרה אם קיימת מילה $x\in\Sigma^m$ כך ש־$y=xx$. מילה $w\in\Sigma^n$ נקראת חזרתית אם היא מכילה תת מילה רצופה שהיא חזרה, אחרת היא נקראת לא חזרתית. הוכיחו כי מעל א"ב גדול דיו, קיימות מילים לא חזרתיות ארוכות כרצוננו. כלומר, הוכיחו כי קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת מילה לא חזרתית מעל א"ב בן k איברים שאורכה הוא לפחות n.

רמז: אחת הגרסאות של הלמה הלוקלית כן יכולה לעזור כאן.

תרגיל רביעי   הגשה: 1.8.2012

בלי הרבה נפנוף ידיים (12 נקודות)

נניח ש־$X_0, X_1, \ldots$ הוא הילוך מקרי על הגרף (הלא מכוון והקשיר) G, אשר יוצא מ־v (ז"א $X_0 = v$ בהסתברות 1). נסמן ב־T את המ"מ המקבל את זמן החזרה הראשון ל־v לאחר היציאה ממנו, ז"א $T = \min\{t : X_t = v \wedge t > 0\}$, ונסמן $\tau = \mathrm{E}[T]$. לאחר פתרון תרגיל זה תדעו איך מוכיחים שמתקיים $\tau = 1/\pi_v$ (כאשר כאן π מסמן את ההתפלגות הסטציונרית).

הערות: בשאלות יש סימונים מהצורה "$o(1)$", אולם כדאי להעביר את הפורמליזם לאחד מהצורה "לכל $\epsilon > 0$ קבוע מתקיים עבור s גדול דיו... (שיכול להיות תלוי ב־G)". מותר בפתרון להשתמש בדברים שנאמרו לפני תחילת ההוכחה על הקשר בין זמן הביקור לבין התנגדות שקולה של רשת חשמלית, גם כאלו שלא הוכחו במדויק. מותר גם לקצר בהסברים על משפטי ריכוז, כל עוד מדובר במשפטים ידועים ונכונים.

עבור s גדול דיו, נסמן ב־H_s את מספר הפעמים שנכנסנו ל־v ב־s הצעדים הראשונים של ההילוך המקרי שלנו, ז"א $H_s = |\{i : X_i = v \wedge 1 \leq i \leq s\}|$.

- הראו שמתקיים $\mathrm{E}[H_s] = (1 \pm o(1))s\pi_v$ (6 נקודות).
- הראו שבסיכוי $1 - o(1)$, מתקיים $H_s = (1 \pm o(1))s/\tau$. רמז - לכל $j \geq 1$ אפשר לבדוק את תוחלת מספר הצעדים בין הביקור ה־$j-1$ וה־j ב־v. ניתן להשתמש בתכונות של מספר זה (למשל שהשונות שלו סופית) ללא הוכחה, כל עוד זה ברור מספיק שניתן להוכיח אותן (6 נקודות).

מהסעיף השני נובע $\mathrm{E}[H_s] = (1 \pm o(1))s/\tau$ מכיוון שבכל מקרה H_s מקבל ערכים בין 0 ל־s, ואז משני הסעיפים יחד נובע המבוקש.

גם זו הרמונית (6 נקודות)

נתון גרף G (לא מכוון וקשיר) עם קבוצת צמתים V. לכל זוג צמתים $s \neq t$ וצומת v נגדיר את $U_{st}(v)$ להיות תוחלת מספר המעברים ב־v המבוצע ע"י הילוך מקרי המתחיל ב־s, עד לפגיעה הראשונה ב־t. אנו סופרים את היציאה מ־s (ז"א שמתקיים $U_{st}(s) \geq 1$) אולם לא את הכניסה ל־t (כך ש־$U_{st}(t) = 0$). נגדיר עתה את $\phi_{st} : V \to \mathbb{R}$ לפי $\phi_{st}(v) = U_{st}(v)/d(v)$. הראו שזוהי פונקציה הרמונית עם שפה $\{s, t\}$.

הערה: הפונקציה U_{st} משמשת בהוכחה המקורית של Tetali עבור h_{st}. שימו לב שמתקיים $h_{st} = \sum_{v \in V} U_{st}(v)$.

משפחות נחתכות בגרפים לא צביעים (6 נקודות)

נאמר שמשפחת גרפים $\mathcal{F}$ על קבוצת הצמתים $[n]$ נחתכת בגרף H אם בכל חיתוך של שני גרפים מ־$\mathcal{F}$ מופיע H כתת גרף (לאו דווקא מושרה). נניח כי H גרף לא h צביע, ו־$\mathcal{F}$ משפחת גרפים הנחתכת ב־H. הראו כי $|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{n}{2} - h}$. שימו לב שזוהי הכללה של אחת השאלות מחוברת תרגילי האימון.

משפחות נחתכות בשידוכים (6 נקודות)

נניח כי G גרף השידוך על $2n$ צמתים, ו־$\mathcal{F}$ משפחת גרפים על הצמתים $[2n]$ הנחתכת ב־G. הראו כי $|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{2n}{2} - n}$.