תרגיל ראשון **הגשה:** 31.3.2011

משחקים בתוחלות (4 נקודות)

נתון כי X ו־Y הם משתנים מקריים חיוביים, לא בהכרח בלתי תלויים, כך שמתקיים $\frac{\mathrm{E}[X]}{\mathrm{E}[Y]} \geq \alpha$ עבור $\alpha > 0$ כל שהוא. הראו כי בסיכוי גדול מ־0 מתקיים $\frac{X}{Y} \geq \alpha$.

תרגום ווקטורים ממשיים לקבוצות (6 נקודות)

נניח שנתון לנו ווקטור $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ שנרצה "לעגל" לקבוצת צמתים בגרף. כדי לקבל קבוצה כזאת מגרילים סף $t \in [0,1]$ באופן יוניפורמי (על הקטע הממשי) ולפיו את הקבוצה $S_t \triangleq \{i \in V | x_i \geq t\}$.

1. הוכיחו שמתקיים $\mathrm{E}_{t\in[0,1]}|S_t| = \sum_{i=1}^n x_i$.
2. עבור מטריצה סימטרית $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ הראו כי מתקיים

$$\mathrm{E}_{t\in[0,1]}\left(\sum_{i\in S,\, j\in[n]\setminus S} a_{ij}\right) = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}\,|x_i - x_j|$$

מערכת חלוקות (6 נקודות)

מערכת חלוקות עם פרמטר h עבור $U = \{1, \ldots, m\}$ היא סדרת תתי־קבוצה $A_1, \ldots, A_t$ של U כך שלכל שתי קבוצות זרות $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ עבורן $|I| + |J| = h$ מתקיים $\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J}(U \setminus A_j) \neq U$. הראו שעבור $m = O(2^h h \log t)$ אכן קיימת מערכת חלוקות כזו.

חוסר מסודרות (8 נקודות)

נתונה סידרת ביטים $b_1, \ldots, b_n$. כמו כן נתון שלכל $1 \leq i \leq n$, או שיש לפחות ϵn ביטים שווים ל־1 ב־$b_1, \ldots, b_{i-1}$ או שיש לפחות ϵn ביטים שווים ל־0 ב־$b_{i+1}, \ldots, b_n$ (או שני הדברים מתקיימים יחדיו). מגרילים $l = \lceil 5/\epsilon \rceil$ אינדכסים $i_1, \ldots, i_l$ באופן יוניפורמי וב"ת. הראו שבביטים $b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}$ יש ביט שווה ל־1 עם אינדכס קטן מביט ששווה ל־0 בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$.

תרגיל שני **הגשה:** 5.5.2011

סימולציה של הסתברות (6 נקודות)

נתון מספר ממשי $0 < \alpha < 1$. הראו אלגוריתם (עם הוכחה) אשר משתמש אך ורק במ"מ מקריים ב"ת שמקבלים ערך מ־$\{0,1\}$ באופן יוניפורמי ("מטבעות הוגנים"), ופולט "1" בהסברות α בדיוק ו־"0" בהסתברות $1-\alpha$. תוחלת מספר המטבעות שהאלגוריתם משתמש בהם צריכה להיות חסומה ע"י קבוע שאינו תלוי ב־α.

רמז: אפשר לבצע סימולציה של בחירה יוניפורמית של $0 \le \beta \le 1$, ולעצור את הסימולציה ברגע שהשאלה האם $\alpha < \beta$או $\alpha \ge \beta$ היא בעלת תשובה וודאית.

עוד קצת חתך (4 נקודות)

נתון גרף G בעל $m > 0$ קשתות. הראו שקיימת חלוקה של קבוצת הצמתים לשתי קבוצות כך שבחתך יש ממש יותר מ־$\frac{1}{2}m$ קשתות.

ריבועים בגרף דו צדדי (8 נקודות)

מרחב ההסתברות $B(n,n,p)$ מתאר גרף דו צדדי אקראי שנבחר באופן הבא: שתי קבוצות הצמתים שלו הן $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ ו־$U=\{u_1,\ldots,u_n\}$, ולכל $v \in V$ ו־$u \in U$ הזוג uv נבחר להיות קשת בגרף בהסתברות p באופן ב"ת בכל הזוגות האחרים. הראו שאם $p(n)=\omega(1/n)$, אז בהסתברות $1-o(1)$ גרף שנבחר לפי $B(n,n,p(n))$ יכיל עותק של $K_{2,2}$ ("ריבוע").

תתי קבוצות מקריות (6 נקודות)

נניח שאנו מגרילים $2n$ תתי קבוצות מגודל 3 של $\{1,\ldots,n\}$, כל קבוצה לכשעצמה מוגרלת יוניפורמית מכל תתי הקבוצות האפשריות באופן ב"ת בקבוצות האחרות. הראו שבסיכוי $1-e^{\Theta(n)}$ ניתן לבחור n קבוצות מתוכן כך שאף איבר של $\{1,\ldots,n\}$ לא יופיע ביותר מ־40 קבוצות שונות. יש להוכיח טענות שלא הוכחו בשיעור ו/או התרגול.

תרגיל שלישי **הגשה:** 16.6.2011

בהמשך לתרגיל הקודם (3 נקודות)

הוכיחו את אי השוויון ההסתברותי שהושאר להוכחה בפתרון התרגיל הקודם: אם $X_1, \ldots, X_{2n}$ הם מ"מ שמקבלים ערכים ב־$\{0,1\}$, לא בהכרח בלתי תלויים, ומתקיים לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ אי השוויון ההסתברותי $\Pr[X_i = 1 | X_1 = \alpha_1, \ldots, X_{i-1} = \alpha_{i-1}] \leq \frac{9}{20}$, אז עבור $X = \sum_{i=1}^{2n} X_i$ מתקיים $\Pr[X > n] \leq e^{-\Theta(n)}$.
אם במקרה פתרתם את השאלה מהתרגיל הקודם, עדיין ניתן לענות ולקבל את הניקוד עבור שאלה זו.

השמה מורעשת (6 נקודות)

עקב בלבול שהתגלה קרוב מדי למועד ההגשה (היה "k" במקום "c" במקום אחד), מותר להגיש את השאלה הזו גם בתרגיל הבא.

נתונה נוסחת CNF עם m פסוקיות בעלות c משתנים כל אחת, כאשר סה"כ מופיעים n משתנים בנוסחא, וכל משתנה בנוסחא מופיע בלכל היותר c פסוקיות, ונתונה השמה מספקת עבור קבוצת המשתנים. רעש מופעל על ההשמה, במובן שעתה נשנה את הערך של כל משתנה x_i לערך ההפוך בהסתברות קבועה $p \leq \frac{1}{2}$, ללא תלות במה שנעשה במשתנים האחרים. הוכיחו כי בהסתברות לפחות $1 - e^{-p^2 n / 2c^2}$ ההשמה החדשה תספק לכל הפחות $(1 - (c+1)p)m$ מהפסוקיות בנוסחא.

צמתים חסרי קשתות בהיפרגרף (השאלה מבוטלת)

בנוסח השאלה חלה טעות, ולמעשה טענת השאלה אינה נכונה. אנא קבלו את התנצלותינו.

באשר לגרסא הלא־סימטרית (3 נקודות)

נתונים (לפי הסימון של השיעור) מאורעות "רעים" $B_1, \ldots, B_m$ וגרף תלויות מכוון עבורם $D(\{1, \ldots, m\}, E)$.
כמו כן נתון שלכל i מתקיים $\Pr[B_i] < \frac{1}{2}$ וכן $\sum_{\{j : ij \in E\}} \Pr[B_j] \leq \frac{1}{4}$. הראו שבמקרה זה מתקיים $\Pr[\bigwedge_{i=1}^m \neg B_i] > 0$.

צביעות חסכוניות (6 נקודות)

הראו שגרף G עם דרגא מקסימלית Δ ניתן לצביעה ב־$\Theta(\Delta^{3/2})$ צבעים, כך שאין קשתות מופרות (מונוכרומטיות) ובנוסף לכך אין צומת עם שלושה שכנים מאותו צבע. מותר להשתמש בתוצאות של שאלות אחרות מהתרגיל גם אם לא הוכחתם אותן.

תרגיל רביעי
הגשה: 28.7.2011

ניתן להגיש עם תרגיל זה את "השמה מורעשת (6 נקודות)" מהתרגיל הקודם אם לא הוגשה אז

לא הסתברות אבל טוב לדעת (6 נקודות)

כזכור $\alpha : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ היא מודולרית אם לכל $A, B \in \mathcal{P}(S)$ מתקיים $\alpha(A)+\alpha(B) = \alpha(A\cup B)+\alpha(A\cap B)$.
הראו שפונקציה כזו מקיימת כלל הכלה והפרדה: $\alpha(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{1+|J|}\alpha(\bigcap_{j\in J} A_j)$.

טיול בגרף נאה (6 נקודות)

נתון ש־s ו־t הם צמתים בגרף 2־קשיר (בצמתים) ו־3־רגולרי (דרגות כל צמתיו 3) בעל n צמתים. הראו שמתקיים $k_{st} \leq \frac{3}{4}n^2$. מותר להשתמש בדברים שלמדתם בפיזיקה.

שוויון אצל קלייטמן (4 נקודות)

מצאו דוגמא (מעל S מתאים) שבה $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ הן משפחות מונוטוניות עולות, שתיהן אינן ריקות ואינן שוות ל־$\mathcal{P}(S)$, ומתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| = 2^{|S|}|\mathcal{A}\cap\mathcal{B}|$.

אי שוויון אצל קלייטמן (6 נקודות)

נתון ש־$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ הן משפחות מונוטוניות עולות לא ריקות, וכן ששתיהן כוללות אך ורק תתי קבוצות של S מגודל גדול מ־$\frac{1}{2}|S|$. הראו שבהכרח מתקיים $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| < 2^{|S|}|\mathcal{A}\cap\mathcal{B}|$.