פתרונות לתרגיל הראשון

סימולציה של פרמוטציה

השיטה הקלה להוכחה: מספר הפרמוטציות האפשריות של $\{1,\ldots,n\}$ הוא $n!$. לעומת זאת, מספר האפשרויות הכולל של ההגרלות המתבצעות באלגוריתם הוא n^n, ויתרה מכך כל תוצאה אפשרית (המתבטאת בסדרת ההחלפות שהאלגוריתם בחר לעשות) מתקבלת בהסתברות $1/n^n$ בדיוק. הפרמוטציה הסופית שהתקבלה תלויה דטרמיניסטית בתוצאות ההגרלה של האלגוריתם, ולכן כל שנותר הוא להוכיח ש־$n!$ אינו מחלק את n^n (ולכן לא יתכן ש־$1/n!$, הסיכוי שמקבלים את פרמוטצית הזהות בהגרלה יוניפורמית של פרמוטציות, יהיה כפולה שלמה של $1/n^n$). אפשר למשל להוכיח זאת ע"י בחירת מספר ראשוני p הקטן מ־n ואינו מחלק אותו. מספר זה יחלק את $n!$ ולא יחלק את n^n.

עוד שיטה: אפשר לדוגמא לחשב במדויק את הסיכוי ש־n יעבור ל־1 בפרמוטציה המתקבלת. מתקבל $\frac{2}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} < \frac{1}{n}$.

סכום מקרי

יהי j אינדכס שעבורו $\alpha_j \neq 0$. לכל קבוצה $J \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}$ לא יכול להתקיים שגם $\sum_{i\in J}\alpha_i = 0$ וגם $\sum_{i\in J\cup\{j\}}\alpha_i = 0$. מכיוון שבחירה יוניפורמית של תת קבוצה $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ שקולה לבחירת יוניפורמית של תת קבוצה $\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}$ ואז בחירה יוניפורמית בלתי תלויה בין שתי האפשרויות $I = J$ ו־$I = J\cup\{j\}$, נובע מכך שהסיכוי עבור $\sum_{i\in I}\alpha_i = 0$ אינו יכול לעלות על $\frac{1}{2}$.

ניחושים מול שקרן

האלגוריתם: בשלב ה־l (מתחילים מ־$l = 0$) האלגוריתם שואל את השקרן את כל 2^l השאלות החל מ־"האם המספר הוא $k = 1$?" ועד "האם המספר הוא $k = 2^l$?". כמובן שהאלגוריתם עוצר בפעם הראשונה שהוא מקבל תשובה "כן".

הוכחת התוחלת: יהי $r = \lceil \log k \rceil$. האלגוריתם בטוח יבצע את r השלבים הראשונים, והסיכוי לביצוע השלב ה־l עבור $l > r$ הוא 3^{l-r}, שזהו הסיכוי שהתשובה עבור k (המספר הנכון) היתה "לא" שקרי בכל $l - r$ הפעמים הקודמות שהאלגוריתם נשאל זאת. מכאן אפשר לקבל חסם עבור תוחלת מספר השאלות הכולל:

$$\sum_{i=0}^{r} 2^i + \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j}2^{r+j} = (2^{r+1}-1) + 2^r\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^j = 2^{r+1} + 2^r - 1 < 2^{r+2} < 8k$$

פתרונות לתרגיל השני

צביעה צבעונית

בהינתן גרף G המקיים את התנאים, נצבע אותו ע"י כך שכל קשת $e \in E$ תקבל צבע מ־$\{1,2,3\}$ באופן מקרי, יוניפורמי וב"ת בכל הקשתות האחרות. להשלמת ההוכחה נראה עתה שבין כל זוג צמתים u, v יש מסלול צבעוני (שבו אף צבע לא מופיע פעמיים) בהסתברות $1 - o(n^{-2})$, ומכך ינבע (לפי איחוד מאורעות) שבהסתברות $1 - o(1)$ זוהי צביעה צבעונית של הגרף כולו. לשם כך נבחן שלושה מקרים.

ראשית, אם יש בגרף קשת בין u ל־v אז יש ביניהם מסלול צבעוני בהסתברות 1. שנית, אם יש ל־u ו־v לפחות $\frac{1}{4}n$ שכנים משותפים, אז יש ביניהם קבוצה של $\frac{1}{4}n$ מסלולים זרי קשתות מאורך 2 (לכל שכן משותף w ניקח את המסלול uwv). כל מסלול כזה הוא אי־צבעוני בהסתברות $\frac{1}{3}$, והצביעות שלהם כולן בלתי תלויות זו בזו. מכאן שאז הסיכוי לקיום מסלול צבעוני מ־u ל־v הוא לפחות $1 - 3^{-n/4} = 1 - o(n^{-2})$.

במקרה האחרון נבחר קבוצה A של $\frac{1}{4}n$ צמתים שכנים של u שאינם שכנים של v. לכל $w \in A$ קיים צומת w' שהוא שכן גם של w וגם של v, לפי התנאי על הדרגה המינימלית של G (יכול להיות שזה יהיה אותו צומת עבור צמתים שונים מ־A). עתה יש לנו קבוצה של $\frac{1}{4}n$ מסלולים מאורך 3 מ־u ל־v. המסלולים האלה אינם בהכרח זרי קשתות, אבל עדיין המאורעות שמסלולים אלו אינם צבעוניים יהיו בלתי תלויים לחלוטין. הסיבה לכך היא שהקשתות המשותפות של המסלולים יכולות להיות רק הקשתות שנוגעות ב־v, וההסתברויות לאי־הצבעוניות של המסלולים האלו נשארות זהות אפילו אם אנחנו יודעים מראש את צביעת כל הקשתות הנוגעות ב־v. הסיכוי שמסלול אחד מאורך 3 יהיה אי־צבעוני היא $\frac{7}{9}$, ועל כן הסיכוי לאי קיומו של מסלול צבעוני כאן תהיה $1 - (\frac{7}{9})^{n/4} = 1 - o(n^{-2})$.

פסוקיות לא מדי מסופקות

אנו נגריל הצבה לקבוצת המשתנים $x_1, \ldots, x_n$ של המשתנים באופן יוניפורמי וב"ת. נסמן ב־X_i את משתנה האינדיקטור עבור המאורע "הפסוקית ה־i הסתפקה", וב־$X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ את המ"מ של מספר הפסוקיות שהסתפקו. באופן דומה למה שחושב עבור SAT בכתה מתקיים $\mathrm{E}[X] = \frac{3}{4}m$, ומייד נוכיח עבור בחירה מתאימה של C שיתקיים $\mathrm{V}[X] \leq \frac{1}{4}\epsilon^2 m^2$. מכאן ינבע לפי חוק צ'בישף שבסיכוי לפחות $\frac{3}{4}$ ההצבה שלנו תהיה כנדרש.

ראשית נחשב את $\mathrm{Cov}[X_i, X_j]$ לפי ניתוח למקרים:

- אם לפסוקיות ה־i וה־j אין יותר ממשתנה אחד משותף, אז שני מאורעות ההסתפקות הם בלתי תלויים זה בזה (בגלל שידיעת ערך של משתנה אחד אינה משנה את סיכוי ההסתפקות של פסוקית NAE, ומתקיים $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0$.
- אם לשתי הפסוקיות יש שלושה משתנים משותפים וזו אינה אותה פסוקית אז הקווריאנס אינו חיובי, $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] \leq 0$. אם זוהי אותה פסוקית, ז"א ש־$i = j$, אז הקווריאנס זהה לשונות של X_i, שהיא קטנה מ־1 (הערה: היפוך שלושת הליטרלים מביא אותנו למצב של "אותה פסוקית", אם כי זה לא משנה הרבה את החישוב אם אנו מרשים כאלו כפילויות גם).
- אם יש שני משתנים משותפים בדיוק, אז למרות שניתן לחסום באופן יותר מדוייק נסתפק בחסם $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = \mathrm{E}[X_i X_j] - (\frac{3}{4})^2 < 1$. מספר הזוגות המקסימלי של פסוקיות כאלו הוא $8m(n-3) < 8mn$.

עתה ניתן לחסום את השונות של X:

$$\mathrm{V}[X] = \sum_{1 \leq i,j \leq m} \mathrm{Cov}[X_i, X_j] < 0 + m + 8mn < 9mn$$

לסיום ההוכחה, בוחרים $C = 36\epsilon^{-2}$, על מנת שיתקיים $9mn = \frac{1}{4}\epsilon^2 Cnm < \frac{1}{4}\epsilon^2 m^2$.

גרפים ללא חיתוך

הבניה מתחילה בדומה לבניה של גרף עם מותן גדולה ומספר צביעה גבוה. אנו נבחר גרף לפי מרחב ההסתברות $G(n,p)$ כאשר $p(n)=n^{(1-C)/C}$ (במקרה שלנו נסתכל רק על n זוגיים). כבר הוכח בכתה שבגרף כזה ההסתברות שיהיו יותר מ־$\frac{1}{2}n$ מעגלים מגודל קטן מ־C הוא $o(1)$. מה שנעשה עתה הוא להסיר מכל מעגל כזה קשת אחת. נסיים בכך שנוכיח שבסיכוי $1-o(1)$, לכל החלוקות V_1,V_2 של קבוצת הצמתים של הגרף המקורי (לפני הסרת הקשתות) לקבוצות שווית גודל, מספר הקשתות בין V_1 ל־V_2 הוא יותר מ־$(C+1)n$.

נבחן חלוקה V_1,V_2 אחת ספציפית. על מנת לחסום את הסיכוי למיעוט קשתות בין שתי הקבוצות עדיף הפעם שלא להשתמש בחסמים הכלליים שנלמדו בכיתה. במקום זה לכל קבוצה F בת $(C+1)n$ זוגות אפשריים של צומת מ־V_1 וצומת מ־V_2, נבחן את המאורע שבין V_1 ל־V_2 אין אף קשת שאינה ב־F, ונכפיל זאת במספר הבחירות האפשריות עבור F. נקבל את החסם:

$$\binom{\frac{1}{4}n^2}{(C+1)n}\cdot(1-n^{(1-C)/C})^{n^2/4}<n^{4Cn}\cdot e^{-n^{(1-C)/C}\cdot n^2/4}=e^{n(4C\log n-n^{1/C}/4)}=o(2^{-n})$$

בסופו של דבר נכפיל חסם זה במספר החלוקות האפשריות עבור V_1,V_2, שבוודאי חסום ע"י 2^n (הוא אפילו $o(2^n)$ בגלל התנאי על גודל הקבוצות). נקבל סה"כ הסתברות של $o(1)$ לקיום חלוקה לא טובה. מכאן שעבור n גדול דיו, בסיכוי גדול מ־0 הגרף שהוגרל ע"י $G(n,p)$ יהיה כזה שלאחר הסרת הקשתות כפי שתואר למעלה הוא יקיים את כל שנדרש מתנאי השאלה.

פתרונות לתרגיל השלישי

הילוך מקרי על הקוביה

אנו נגדיר מרטינגל חשיפה $D_0, \ldots, D_n$ עבור המרחק הסופי d_n, כאשר בצעד ה־i חושפים את $x^{(0)}, \ldots, x^{(i)}$. שימו לב שבד"כ D_i אינו שווה ל־d_i עבור $i < n$ (אבל כמובן $D_n = d_n$). לא קשה לראות שמרטינגל זה יקיים את תנאי ליפשיץ, ולכן לפי משפט אזומה יתקיים לכל $\alpha > 0$ החסם $\Pr[D_n < \mathrm{E}[D_n] - \alpha n] \leq 2^{-\Omega(n)}$. על מנת להשלים את ההוכחה על כן צריך רק להראות שמתקיים $\mathrm{E}[D_n] = \Omega(n)$. על מנת להוכיח זאת, מספיק להוכיח שקיים $\beta > 0$ כך שבסיכוי חסום מלמטה (ע"י קבוע גדול מ־0) מתקיים $D_n \geq \beta n$. זאת מכיוון שגם $\Pr[D_n \geq \mathrm{E}[D_n] + \frac{1}{2}\beta n] \leq 2^{-\Omega(n)}$, ולכן לא יתכן אז $\mathrm{E}[D_n] < \frac{1}{2}\beta n$.

אפשרות אחת לחסם כזה היא שימוש בבעית אספן הקופונים. תוחלת מספר הערכים ב־$\{1, \ldots, n\}$ שאינם זהים לאף j_i היא $(1 - \frac{1}{n})^n \cdot n = (1 + o(1))e^{-1}n$, ולכן עבור n גדול דיו יש (לפי אי שוויון מרקוב) הסתברות לפחות $\frac{1}{12}$ שמספר הערכים הנ"ל הוא לא יותר מ־$\frac{11}{10}e^{-1}n$ (יש חסמים הרבה יותר הדוקים כאן, אבל לא נצטרך אותם). במקרה שזה קורה לא קשה לראות עבור $\beta = (1 - \frac{22}{10}e^{-1}) > 0$ שאכן מתקיים $d_n > \beta n$.

פונקציות מונוטוניות מקריות

אנו נשתמש במשפט ארבעת הפונקציות, כאשר נתיחס לפונקציה $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ כאל תת קבוצה A_f של $S = \{0,1\}^n$ ע"פ $A_f = \{\underline{x} : f(\underline{x}) = 1\}$. עתה נסמן ב־$\mathcal{M}$ את משפחת הפונקציות המונוטוניות, ב־$\mathcal{A}$ את הפונקציות המונוטוניות המקבלות ערך 1 על $\underline{y}$, וב־$\mathcal{B}$ את הפונקציות המונוטוניות המקבלות ערך 1 על $\underline{z}$.

בדומה להוכחה של משפט Kleitman, אנו מקבלים ע"י שימוש בפונקציות ה־1 המתאימות את אי השוויון $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}|$. עתה יש לשים לב ש־$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ הוא בדיוק קבוצת הפונקציות המונוטוניות המקבלות 1 גם על $\underline{y}$ וגם על $\underline{z}$, וכן לשים לב לעובדה שכל איבר ב־$\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}$ הוא בפרט פונקציה מונוטונית, ולכן מתקיים גם $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}| \cdot |\mathcal{M}|$. חלוקת שני צדי אי השוויון ב־$|\mathcal{M}|^2$ תניב את המבוקש במושגים של הסתברויות.

שתי שאלות על הילוכים מקריים מהוססים

התכנסות להילוך הסטציונרי

ישנן שתי שיטות להוכיח זאת. נתחיל מהשיטה האלגברית: נניח ש־P היא מטריצת המעבר של ההילוך המקרי (הלא־מהוסס) על הגרף ששלנו, ו־P' היא מטריצת המעבר של ההילוך המהוסס. מתקיים אם כן $P' = \frac{1}{2}(P + I)$ כאשר I מסמנת את מטריצת היחידה. מכאן שיש ל־P' אותם ווקטורים עצמיים כמו ל־P, כאשר עבור כל ערך עצמי λ של P יהיה ערך עצמי $\lambda' = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$ של P'.

כל שנותר עתה הוא להיזכר בכך שכל הערכים העצמיים של P הם ממשיים (הוכח בכיתה), שערכם הוא בין 1 ל־-1 (צוין בכתה, נובע מכך שהמדובר במטריצה שסכומי השורות שלה הם 1), ושיש רק ווקטור עצמי אחד, זה של ההתפלגות הסטציונרית, שעבורו הע"ע הוא 1 (זה נובע מקשירות הגרף, עובדה זו צוינה בכתה ללא הוכחה). נשים לב עתה שעבור $-1 \leq \lambda < 1$ מתקבל $|\lambda'| < 1$ ורק עבור $\lambda = 1$ מתקבל $\lambda' = 1$, ומכאן של־P' כל הערכים העצמיים קטנים מ־1 בערך מוחלט פרט להתפלגות הסציונרית שהיא ווקטור עצמי יחידי שערכו העצמי הוא 1. מכאן נובע המבוקש.

עתה נסקור בקצרה את שיטת ההוכחה השניה. אפשר להשתמש בשיטת הצימוד: אנו נגדיר שני הילוכים מקריים מהוססים $\underline{X} = X_0, X_1, \ldots$ ו־$\underline{Y} = Y_0, Y_1, \ldots$ אשר לשניהם יהיו את מטריצת המעבר P', ההתפלגות הבלתי־מותנה של Y_0 (ולכן של כל Y_i) היא ההתפלגות הסטציונרית, ההתפלגות של $\underline{X}$ היא זו של ההילוך המקרי המקורי (מושג ע"י קביעת ההתפלגות של X_0 להיות זו של ההילוך המקורי באופן ב"ת ב־Y_0), וכן מתקיים $\Pr[Y_i = X_i] \to 1$.

לשם כך נבחר את (X_0,Y_0) כמתואר למעלה, ועתה נתאר את המעבר (המקרי) מ־(X_i,Y_i) ל־(X_{i+1},Y_{i+1}). אם $X_i \neq Y_i$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $X_{i+1}=X_i$ ואת Y_{i+1} להיות שכן מקרי של Y_i לפי הגרף שלנו, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $Y_{i+1}=Y_i$ ואת X_{i+1} להיות שכן מקרי של Y_i לפי הגרף. אם $X_i=Y_i$, את בסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע $X_{i+1}=Y_{i+1}=X_i$, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $X_{i+1}=Y_{i+1}$ להיות שכן מקרי של X_i. ההוכחה ששאר התכונות מתקיימות (מטריצות המעבר הלא מותנות של $\underline{X}$ ושל $\underline{Y}$, וכן התכנסות ההסתברות עבור המאורע $X_i=Y_i$) מושארת כתרגיל לקורא (עבור ההתכנסות, שימו לב שתמיד ניתן לחסום מלמטה את הסיכוי ש־$X_{i+n}=Y_{i+n}$ לכל צמד ערכים אפשרי של $X_i \neq Y_i$).

זמני הביקור

ניתן לעשות רדוקציה של השאלה עבור הילוך מקרי מהוסס על הגרף G לשאלה על הילוך מקרי רגיל על גרף חדש G'. הגרף G' יוגדר ע"י כך שנהפוך כל קשת $e=v_iv_j$ של G למסלול מאורך 2 שבמרכזו צומת חדש u_e. אם ל־G היו n צמתים ו־m קשתות, אז לגרף החדש יהיו $n'=n+m$ צמתים ו־$m'=2m$ קשתות. בנוסף, שימו לב שאם בגרף הישן ההתנגדות השקולה בין s ל־t (כפי שהוגדרה בחוברת הקורס) היא R_{st}, אז בגרף החדש זו תהיה $R'_{st}=2R_{st}$.

עתה נסמן ב־$\underline{Y}=Y_0,Y_1,\ldots$ הילוך מקרי (לא מהוסס) על G' שמתחיל בצומת s (שקיימת גם ב־G וגם ב־G'). שימו לב עתה שסדרת המ"מ עם האינדכסים הזוגיים $Y_0,Y_2,\ldots$ מתפלגת בדיוק כמו הילוך מקרי מהוסס על הגרף המקורי G, בעוד שהמ"מ במקומות האי־זוגיים $Y_1,Y_3,\ldots$ לעולם לא יקבלו ערכים המתאימים לצמתי הגרף המקורי, ובפרט לא יוכלו לקבל את t. מכאן שזמן הביקור הממוצע בין s ו־t לפי ההילוך המהוסס על G זהה בדיוק למחצית זמן הביקור הממוצע בין s ל־t לפי ההילוך הלא־מהוסס על G'. נסמן ב־$\hat{k}_{st}$ את זמן הביקור לפי ההילוך המהוסס, ב־k'_{st} את זמן הביקור לפי ההילוך על G', וב־k_{st} את זמן הביקור לפי הילוך לא מהוסס על G. כל שנותר עתה הוא לכתוב:

$$\hat{k}_{st}=\frac{1}{2}k'_{st}=m'R'_{st}=4mR_{st}=2k_{st}$$