תרגיל ראשון (הגשה: 28.11.2005)

הילוך על המעגל

נתון האלגוריתם הבא: האלגוריתם שומר מונה, שערכו ההתחלתי הוא 0. בכל שלב מטילים מטבע (הוגנת), ובהתאם לתוצאה מגדילים או מקטינים את המונה ב־1. האלגוריתם עוצר כאשר ערך המונה מתחלק שוב ב־n. הוכיחו שלכל n קבוע מראש, תוחלת זמן הריצה של האלגוריתם היא סופית.

כוכבים בגראפים מקריים

אנו מסתכלים על הגרף המקרי בעל n הצמתים $G(n, \frac{1}{2})$, שבו כל זוג צמתים נבחר להיות קשת בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן בלתי תלוי בזוגות האחרים. הוכיחו כי בהסתברות $1 - o(1)$ גרף זה מקיים את התכונה הבאה: לכל צומת v בגרף קיימים שלושה שכנים שלו u_1, u_2, u_3 אשר אין ביניהם קשתות (ז"א שהגרף המושרה על $\{v, u_1, u_2, u_3\}$ הוא "כוכב עם שלוש פינות שמרכזו v").

גובה עץ מקרי

נבנה עץ מקרי בעל קבוצת הצמתים $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ב־n שלבים באופן הבא: בשלב הראשון ניקח את ה"עץ" בעל הצומת היחיד v_1, ואח"כ בכל שלב i נבחר צומת באופן מקרי ויוניפורמי מ־$\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, ונחבר אליו את v_i כעלה חדש. לדוגמא, לא קשה לראות כי הסיכוי שהעץ שיצא בסוף הוא המסלול בעל n הצמתים יהיה $1/(n-1)!$. הוכיחו כי תוחלת גובה העץ היא לפחות $\Omega(\log n)$.

תרגיל שני (הגשה: 2.1.2006)

הפרדה ע"י פונקציה לינארית

תהי $A \subseteq \{0,1\}^n$ קבוצה כל שהיא בת k איברים בקוביה הבוליאנית ה־n מימדית. הראו שקיימת פונקציה לינארית $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ כך שמתקיים עבור מספר האיברים ב־A המאפסים את f אי השוויון $|\{v \in A | f(v) = 0\}| = \frac{1}{2}k \pm O(\sqrt{k})$.

מיון ע"י QuickSort

ניזכר באלגוריתם QuickSort למיון קבוצה A בת n מספרים (לצורך השאלה נניח שאין ב־A שני איברים זהים): בוחרים באופן מקרי ויוניפורמי איבר $a \in A$. עתה מגדירים את הקבוצות $A_0 = \{b \in A | b < a\}$ ו־$A_1 = \{b \in A | b > a\}$. ממיינים באופן רקורסיבי את A_0 ואת A_1, ופולטים (בסדר זה) את A_0, a ו־A_1. הוכיחו כי בסיכוי $1 - o(1)$ מספר ההשוואות הכולל באלגוריתם אינו עולה על $100 n \log n$ (הלוגריתם בבסיס 2). רמז: נסו לבדוק מה קורא עם כל $b \in A$ לחוד.

קבוצות ב"ת בהיפרגרפים

עבור היפרגרף 3־יוניפורמי (ז"א מבנה עם קבוצת צמתים V וקבוצת "קשתות" E שבו כל קשת היא בת שלושה צמתים בדיוק) בעל n צמתים ו־m קשתות, כאשר $m \geq \frac{1}{3}n$, הראו כי קיימת קבוצת צמתים בלתי תלויה (ז"א קבוצה $V' \subseteq V$ שאינה מכילה אף קשת מ־E) שגודלה לפחות $\frac{2n^{3/2}}{3\sqrt{3m}}$.

תרגיל שלישי (הגשה: 30.1.2006)

הצבה מספקת מינימלית

נסתכל על הבעיה הבאה: עבור 3CNF נתון, מצא הצבה מספקת (אם יש כזו) שבה מספר המשתנים שערכם 1 הוא מינימלי. כמובן שבעיה זו היא NP־קשה. מה שאתם מתבקשים לעשות הוא רדוקציה הסתברותית למקרה שבו ההצבה המינימלית הנ"ל היא יחידה (אם היא קיימת).

מרטינגל חשיפה עבור עץ מקרי

נבנה שוב עץ מקרי בעל קבוצת הצמתים $\{v_1,\ldots,v_n\}$ ב־n שלבים באופן הבא: מתחילים מה"עץ" בעל הצומת היחיד v_1, ואח"כ בכל שלב i בוחרים צומת באופן מקרי ויוניפורמי מ־$\{v_1,\ldots,v_{i-1}\}$, ומחברים אליו את v_i. הגדירו מרטינגל חשיפה של גובה העץ עבור n שלבי בניית העץ, והראו שהמרטינגל מקיים את תנאי ליפשיץ (עצה ידידותית ־ לא למהר יותר מדי בהוכחה).

קבוצת צמתים מאולצת

הוכיחו את קיומו של קבוע גלובלי c המקיים את הדבר הבא: אם G הוא גרף עם דרגא מקסימלית d, ו־$V_1,\ldots,V_m$ הן קבוצות זרות בנות cd צמתים של G כל אחת, אז קיימת קבוצה U המכילה צומת אחד מכל V_i ושאינה מכילה אף קשת של G.

תרגיל רביעי (הגשה: 12.3.2006)

משפחות נחתכות

משפחה $\mathcal{F}$ של תתי קבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ תיקרא נחתכת אם לכל $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ מתקיים $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. הראו שאם $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_k$ כולן נחתכות, אז יש לפחות 2^{n-k} תתי קבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ שלא שייכות לאף אחת מהן. רמז: נסו להסתכל על המקרה שהמשפחות הנ"ל הן מונוטוניות לא יורדות.

הילוך על הקוביה

נגדיר הילוך מקרי על הקוביה הבוליאנית $\{0,1\}^n$ באופן הבא: X_0 הוא הווקטור $(0,\ldots,0)$ בהסתברות 1. בהינתן X_i, אנו נבחר בהסתברות $\frac{1}{2}$ את X_{i+1} להיות זהה לו, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נגדיר את X_{i+1} ע"י כך שנבחר באופן ימקרי ויוניפורמי קורדינטה של X_i ונהפוך את ערכה, כששאר הקורדינטות ישארו אותו דבר. הוכיחו שעבור $\epsilon > 0$ קבוע המרחק בין ההתפלגות של X_t לבין ההתפלגות היוניפורמית על $\{0,1\}^n$ קטן מ־ϵ, עבור $t = O(n\log n)$.

קבוצות צבעוניות

נתונות m תתי קבוצות $A_1,\ldots,A_m$ של הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$, ונתון שמתקיים עבורן $\sum_{i=1}^{n}(2/3)^{|A_i|} < 1/6$. הראו שקיימת צביעה $c : \{1,\ldots,n\} \to \{1,2,3\}$ שעבורה כל הקבוצות הנ"ל מכילות איברים מכל שלושת הצבעים, והסבירו איך ניתן למצוא צביעה כזו בזמן פולינומי ב־n ו־m.