התרגיל האפס (לא להגשה)

1. קרבה בין התפלגויות

עבור שתי מידות הסתברות P,Q מעל $[n]=\{1,\ldots,n\}$ נגדיר את המרחק ביניהם לפי $|P-Q|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr_P(i)-\Pr_Q(i)|$. בספרות מרחק זה קרוי ה־Variation Distance.

א. הראו שלכל מאורע E מתקיים $|\Pr_P(E)-\Pr_Q(E)|\le|P-Q|$.

ב. הראו שקיים E עבורו מתקיים $|\Pr_P(E)-\Pr_Q(E)|=|P-Q|$.

2. התפלגויות מותנות

נניח ש־X ו־Y הם שני משתנים מקריים (לא ב"ת) מעל אותו מרחב הסתברות, אשר מקבלים ערכים ב־$\{1,\ldots,n\}$. נניח שקיים מאורע E כך ש־$\Pr[E]\ge 1-\epsilon$, ושאם E מתקיים אז $X=Y$ (ז"א $\Pr[X=Y|E]=1$). הראו שהמרחק בין ההתפלגות על ערכי X לבין ההתפלגות על ערכי Y הוא לא יותר מ־ϵ, ז"א $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr[X=i]-\Pr[Y=i]|\le\epsilon$.

3. התפלגויות מותנות ־ הכיוון השני

נניח ש־$p_1,\ldots,p_n$ ו־$q_1,\ldots,q_n$ הם ווקטורי התפלגות (סדרות של מספרים אי־שליליים שסכומן 1) שעבורם מתקיים $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|p_i-q_i|=\epsilon$. הראו שקיים מרחב הסתברות, ושני מ"מ X ו־Y, כך שלכל i מתקיים $\Pr[X=i]=p_i$ ו־$\Pr[Y=i]=q_i$, וכן המאורע $X=Y$ מתקיים בהסתברות $1-\epsilon$ בדיוק.

תרגיל ראשון   הגשה: 22.11.2004, 13:00

תרגיל בהסתברות

יהי μ מרחב הסתברות על קבוצת המחרוזות הבינאריות מאורך k, המוגדר כך שלכל i הביט ה־i נבחר להיות 1 בהסתברות α_i באופן בלתי תלוי בבחירת הביטים האחרים. יהי ν מרחב הסתברות על אותה קבוצה, המוגדר באופן זהה, פרט לכך שלכל i הביט ה־i נבחר להיות 1 בהסתברות β_i (באופן בלתי תלוי באחרים). הראו שהמרחק (variation distance) בין μ ו־ν הוא לכל היותר $\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i - \beta_i|$.

סימולציה של התפלגות

אנו רוצים לבחור באופן מקרי יוניפורמי לחלוטין איבר מתוך $\{1,2,3\}$, אולם מקור ההסתברות היחידי שברשותינו הוא מטבע הוגנת, שאפשר להטילה מספר פעמים לקבלת משתנים מקריים ב"ת הנבחרים יוניפורמית מתוך $\{0,1\}$.

א. הראו שלא קיים k עבורו יש אלגוריתם לבחירה יוניפורמית מתוך $\{1,2,3\}$ אשר בהסתברות 1 מבצע k או פחות הטלות של המטבע.

ב. הראו שקיים אבל אלגוריתם כנדרש שעבורו תוחלת מספר ההטלות היא סופית.

אוטומירפיזמים בגרף מקרי

הראו שלגרף המקרי $G(n,\frac{1}{2})$ אין אוטומורפיזם לא טריביאלי בהסתברות $1-o(1)$. ז"א, שבהסתברות $1-o(1)$, לכל פרמוטציה של הצמתים של G שאינה פונקצית הזהות תהיה קשת שתעבור לזוג צמתים שאינו קשת (או זוג שאינו קשת שיעבור לקשת).

תרגיל שני   הגשה: 20.12.2004, 13:00

מציאת קשתות בהיפרגרף

נזכיר שהיפרגרף 3-יוניפורמי הוא מבנה בעל קבוצת צמתים V וקבוצת "קשתות" E שהיא קבוצה של שלשות לא סדורות של צמתים מ-V. נתון ש-H הוא היפרגרף 3-יוניפורמי עם n צמתים המכיל לפחות n^2 קשתות, אולם אף זוג צמתים שלו אינו משתתף ביותר מ-$\frac{1}{10}\sqrt{n}$ קשתות. הראו שאם בוחרים קבוצת צמתים של H ע"י כך שכל צומת יבחר בהסתברות $10/\sqrt{n}$ באופן ב"ת בצמתים האחרים, אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ קבוצה זו תכיל קשת מ-H.

קבוצה דומיננטית בגרף

הראו שלכל גרף G בעל n צמתים ודרגה מינימלית d, קיימת קבוצה U בת $\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}n$ צמתים, כך שכל צומת שאינו ב-U הוא שכן של צומת מ-U.

בידוד של שני מבנים

נניח ש-A קבוצה בת m איברים, וש-$\mathcal{F}$ היא משפחה של תתי קבוצות של A. הראו שאם מגרילים באופן מקרי ויוניפורמי (וב"ת) פונקצית משקל $w : A \to \{1, \ldots, n\}$, אז בסיכוי $1 - \frac{3m}{n}$ לפחות גם האיבר ב-$\mathcal{F}$ בעל המשקל המינימלי וגם האיבר ב-$\mathcal{F}$ בעל המשקל השני הכי קטן הם יחידים.

מחלקות סיבוכיות

המחלקה BPP מוגדרת כמחלקת השפות שעבורם קיים אלגוריתם הסתברותי אשר רץ בזמן פולינומי, ונותן את התשובה הנכונה בהסתברות $\frac{2}{3}$. המחלקה $\mathrm{P/poly}$ מוגדרת כמחלקת השפות כך שלכל n קיים אלגוריתם דטרמיניסטי אשר רץ בזמן פולינומי ונותן את התשובה הנכונה לכל קלט מאורך n: שימו לב שבניגוד ל-P, זה אינו חייב להיות אותו אלגוריתם ל-n שונים; חסם הזמן הפולינומי חייב להיות אחיד לכל ה-n, וכן הוא חייב לחסום את אורך התיאור של האלגוריתם הספציפי ל-n. הוכיחו שמתקיים $\mathrm{BPP} \subseteq \mathrm{P/poly}$.

שיבת האוטומורפיזמים

נסו שוב את השאלה מהתרגיל הקודם על אוטומורפיזמים בגרף מקרי, עם הרמז הבא: ניתן לחלק את הפרמוטציות לאלו שמשאירות את כל הצמתים במקום פרט ללא יותר מ-$\sqrt{n}$ מהם, ולפרמוטציות שמשאירות פחות מ-$n - \sqrt{n}$ צמתים במקום. הקבוצה הראשונה אינה ענקית, ולפרמוטציה מהקבוצה השניה סיכוי קטן ביותר להיות אוטומורפיזם.

אלו מביניכם שהצליחו לענות על השאלה כבר בתרגיל הקודם (וקבלו לפחות 6 מתוך 9 נקודות) לא צריכים לענות על שאלה זו עתה.

תרגיל שלישי   הגשה: 19.1.2004, 13:00

בחירה של תתי קבוצות

נתון ש־A היא ת"ק מקרית של $\{1,\ldots,n\}$. לא נתון כלום על מרחב ההסתברות שלפיו בוחרים את A, פרט לכך שזוהי בהסתברות 1 קבוצה בת k איברים שונים זה מזה (k הוא קבוע נתון), וכן שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\Pr[i \in A] = \frac{k}{n}$. הראו שעבור $(1-o(1))2^n$ מתתי הקבוצות $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ מתקיים $\Pr[A \subseteq S] = 2^{-k} \pm o(1)$. רמז: ניתן להסתכל על $\Pr[A \subseteq S]$ כעל כמות התלויה ב־S, ולנתח את ההתפלגות עבור בחירה מקרית יוניפורמית של S.

מרחקים בין פונקציות מונוטוניות

נניח ש־$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ היא פונקציה מונוטונית לא יורדת, ז"א שאם $x_i \geq y_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ אז $f(x_1,\ldots,x_n) \geq f(y_1,\ldots,y_n)$, אשר יש לה k אפסים בדיוק (עבור $0 \leq k \leq 2^n$ מתאים), ונניח ש־$g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ היא פונקציה מונוטונית לא עולה. הראו שמרחק Hamming בין שתי הפונקציות (מספר הווקטורים $x_1,\ldots,x_n$ שעבורם f ו־g נבדלות) הוא לפחות $\min\{k, 2^n - k\}$.

צביעת קשתות בגרפים

הראו שלכל d קיים c כך שאם G הוא גרף מדרגה מקסימלית d (ומספר צמתים כל שהוא), אז ניתן לצבוע את הקשתות של G ב־c צבעים כך שבכל המעגלים הפשוטים בגרף יהיו קשתות משלושה צבעים לפחות ("מעגלים מאורך 2" אינם נחשבים). הערה: ניתן להראות זאת גם ללא הגרסא הלא־סימטרית של הלמה הלוקלית (למרות שכמובן לא יורדו נקודות על שימוש כזה).

תרגיל רביעי הגשה: 17.2.2005, 13:00

פונקציות הרמוניות ואוטומורפיזמים

נתונים גרף $G = (V, E)$, קבוצת שפה $\emptyset \neq S \subset V$, תנאי שפה $\psi : S \to \mathbb{R}$, ואוטומורפיזם $\sigma : V \to V$ של G שעבורו $\sigma(u) = u$ לכל $u \in S$. הראו שהפונקציה ההרמונית $\phi : V \to \mathbb{R}$ עם תנאי שפה ψ מקיימת $\phi(\sigma(v)) = \phi(v)$ לכל $v \in V$.

זמני פגיעה וקומטטיביות

הראו שלכל גרף (פשוט ולא מכוון) G בעל m קשתות ולכל זוג צמתים שלו s, t מתקיים $h_{st} \leq 2mh_{ts}$.

משפט טוראן חוזר

הראו שקיים אלגוריתם דטרמיניסטי בזמן פולינומי הפותר את הבעיה הבאה: בהינתן מספרים n ו־k (הניתנים כחלק מהקלט), וגרף G בעל n צמתים ויותר מ־$(1 - \frac{1}{k-1})\frac{n^2}{2}$ קשתות, האלגוריתם מוצא קליק בעל k צמתים ב־G.