

פתרונות לתרגיל הראשון

סימולציה של פרמוטציה

השיטה הקלה להוכחה: מספר הפרמוטציות האפשריות של $\{1, \dots, n\}$ הוא $n!$. לעומת זאת, מספר האפשרויות הכולל של ההגרלות המתבצעות באלגוריתם הוא n^n , ויתרה מכך כל תוצאה אפשרית (המתבטאת בסדרת ההחלפות שהאלגוריתם בחר לעשות) מתקבלת בהסתברות $1/n^n$ בדיוק. הפרמוטציה הסופית שהתקבלה תלויה דטרמיניסטית בתוצאות ההגרלה של האלגוריתם, ולכן כל שנותר הוא להוכיח ש- $n!$ אינו מחלק את n^n (ולכן לא יתכן ש- $1/n!$, הסיכוי שמקבלים את פרמוטציה הזו בהגרלה יוניפורמית של פרמוטציות, יהיה כפולה שלמה של $1/n^n$). אפשר למשל להוכיח זאת ע"י בחירת מספר ראשוני p הקטן מ- n ואינו מחלק אותו. מספר זה יחלק את $n!$ ולא יחלק את n^n .

עוד שיטה: אפשר לדוגמא לחשב במדויק את הסיכוי ש- n יעבור ל-1 בפרמוטציה המתקבלת. מתקבל $\frac{2}{n}(1 - \frac{1}{n})^{n-1} < \frac{1}{n}$.

סכום מקרי

יהי j אינדקס שעבורו $\alpha_j \neq 0$. לכל קבוצה $J \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ לא יכול להתקיים שגם $\sum_{i \in J} \alpha_i = 0$ וגם $\sum_{i \in J \cup \{j\}} \alpha_i = 0$. מכיוון שבחירה יוניפורמית של תת קבוצה $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ שקולה לבחירת יוניפורמית של תת קבוצה $\{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ ואז בחירה יוניפורמית בלתי תלויה בין שתי האפשרויות $I = J$ ו- $I = J \cup \{j\}$, נובע מכך שהסיכוי עבור $\sum_{i \in I} \alpha_i = 0$ אינו יכול לעלות על $\frac{1}{2}$.

ניחושים מול שקרן

האלגוריתם: בשלב ה- l (מתחילים מ- $l = 0$) האלגוריתם שואל את השקרן את כל 2^l השאלות החל מ-"האם המספר הוא $k = 1$?" ועד "האם המספר הוא $k = 2^l$?". כמובן שהאלגוריתם עוצר בפעם הראשונה שהוא מקבל תשובה "כן".

הוכחת התוחלת: יהי $r = \lceil \log k \rceil$. האלגוריתם בטוח יבצע את r השלבים הראשונים, והסיכוי לביצוע השלב ה- l עבור $l > r$ הוא 3^{l-r} , שזהו הסיכוי שהתשובה עבור k (המספר הנכון) היתה "לא" שקרי בכל $l - r$ הפעמים הקודמות שהאלגוריתם נשאל זאת. מכאן אפשר לקבל חסם עבור תוחלת מספר השאלות הכולל:

$$\sum_{i=0}^r 2^i + \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} 2^{r+j} = (2^{r+1} - 1) + 2^r \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = 2^{r+1} + 2^r - 1 < 2^{r+2} < 8k$$

פתרונות לתרגיל השני

צביעה צבעונית

בהינתן גרף G המקיים את התנאים, נצבע אותו ע"י כך שכל קשת $e \in E$ תקבל צבע מ- $\{1, 2, 3\}$ באופן מקרי, יוניפורמי וב"ת בכל הקשתות האחרות. להשלמת ההוכחה נראה עתה שבין כל זוג צמתים u, v יש מסלול צבעוני (שבו אף צבע לא מופיע פעמיים) בהסתברות $(1 - o(n^{-2}))$, ומכך ינבע (לפי איחוד מאורעות) שבהסתברות $(1 - o(1))$ זוהי צביעה צבעונית של הגרף כולו. לשם כך נבחן שלושה מקרים.

ראשית, אם יש בגרף קשת בין u ל- v אז יש ביניהם מסלול צבעוני בהסתברות 1. שנית, אם יש ל- u ו- v לפחות $\frac{1}{4}n$ שכנים משותפים, אז יש ביניהם קבוצה של $\frac{1}{4}n$ מסלולים זרי קשתות מאורך 2 (לכל שכן משותף w ניקח את המסלול (uvw)). כל מסלול כזה הוא אי-צבעוני בהסתברות $\frac{1}{3}$, והצביעות שלהם כולן בלתי תלויות זו בזו. מכאן שאז הסיכוי לקיום מסלול צבעוני מ- u ל- v הוא לפחות $1 - 3^{-n/4} = 1 - o(n^{-2})$.

במקרה האחרון נבחר קבוצה A של $\frac{1}{4}n$ צמתים שכנים של u שאינם שכנים של v . לכל $w \in A$ קיים צומת w' שהוא שכן גם של w וגם של v , לפי התנאי על הדרגה המינימלית של G (יכול להיות שזה יהיה אותו צומת עבור צמתים שונים מ- A). עתה יש לנו קבוצה של $\frac{1}{4}n$ מסלולים מאורך 3 מ- u ל- v . המסלולים האלה אינם בהכרח זרי קשתות, אבל עדיין המאורעות שמסלולים אלו אינם צבעוניים יהיו בלתי תלויים לחלוטין. הסיבה לכך היא שהקשתות המשותפות של המסלולים יכולות להיות רק הקשתות שנוגעות ב- v , וההסתברויות לאי-הצבעוניות של המסלולים האלו נשארות זהות אפילו אם אנחנו יודעים מראש את צביעת כל הקשתות הנוגעות ב- v . הסיכוי שמסלול אחד מאורך 3 יהיה אי-צבעוני היא $\frac{7}{9}$, ועל כן הסיכוי לאי קיומו של מסלול צבעוני כאן תהיה $1 - (\frac{7}{9})^{n/4} = 1 - o(n^{-2})$.

פסוקיות לא מדי מסופקות

אנו נגדיל הצבה לקבוצת המשתנים x_1, \dots, x_n של המשתנים באופן יוניפורמי וב"ת. נסמן ב- X_i את משתנה האינדיקטור עבור המאורע "הפסוקית ה- i הסתפקה", וב- $X = \sum_{i=1}^m X_i$ את המ"מ של מספר הפסוקיות שהסתפקו. באופן דומה למה שחושב עבור SAT בכתה מתקיים $E[X] = \frac{3}{4}m$ ומייד נוכיח עבור בחירה מתאימה של C שיתקיים $V[X] \leq \frac{1}{4}\epsilon^2 m^2$. מכאן ינבע לפי חוק צ'בישף שבסיכוי לפחות $\frac{3}{4}$ ההצבה שלנו תהיה כנדרש.

ראשית נחשב את $\text{Cov}[X_i, X_j]$ לפי ניתוח למקרים:

- אם לפסוקיות ה- i וה- j אין יותר ממשתנה אחד משותף, אז שני מאורעות ההסתפקות הם בלתי תלויים זה בזה (בגלל שידיעת ערך של משתנה אחד אינה משנה את סיכוי ההסתפקות של פסוקית NAE), ומתקיים $\text{Cov}[X_i, X_j] = 0$.

- אם לשתי הפסוקיות יש שלושה משתנים משותפים וזו אינה אותה פסוקית אז הקווריאנס אינו חיובי, $\text{Cov}[X_i, X_j] \leq 0$. אם זוהי אותה פסוקית, ז"א $i = j$, אז הקווריאנס זהה לשונות של X_i , שהיא קטנה מ-1 (הערה: היפוך שלושת הליטרלים מביא אותנו למצב של "אותה פסוקית", אם כי זה לא משנה הרבה את החישוב אם אנו מרשים כאלו כפילויות גם).

- אם יש שני משתנים משותפים בדיוק, אז למרות שניתן לחסום באופן יותר מדויק נסתפק בחסם $\text{Cov}[X_i, X_j] = E[X_i X_j] - (\frac{3}{4})^2 < 1$. מספר הזוגות המקסימלי של פסוקיות כאלו הוא $8m(n-3) < 8mn$.

עתה ניתן לחסום את השונות של X :

$$V[X] = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \text{Cov}[X_i, X_j] < 0 + m + 8mn < 9mn$$

לסיים ההוכחה, בוחרים $C = 36\epsilon^{-2}$, על מנת שיתקיים $\frac{1}{4}\epsilon^2 Cnm < \frac{1}{4}\epsilon^2 m^2$.

גרפים ללא חיתוך

הבניה מתחילה בדומה לבניה של גרף עם מותן גדולה ומספר צביעה גבוה. אנו נבחר גרף לפי מרחב ההסתברות $G(n, p)$ כאשר $p(n) = n^{(1-C)/C}$ (במקרה שלנו נסתכל רק על n זוגיים). כבר הוכח בכתה שבגרף כזה ההסתברות שיהיו יותר מ- $\frac{1}{2}n$ מעגלים מגודל קטן מ- C הוא $o(1)$. מה שנעשה עתה הוא להסיר מכל מעגל כזה קשת אחת. נסיים בכך שנוכיח שבסיכוי $1 - o(1)$, לכל החלוקות V_1, V_2 של קבוצת הצמתים של הגרף המקורי (לפני הסרת הקשתות) לקבוצות שוות גודל, מספר הקשתות בין V_1 ל- V_2 הוא יותר מ- $(C+1)n$.

נבחן חלוקה V_1, V_2 אחת ספציפית. על מנת לחסום את הסיכוי למיעוט קשתות בין שתי הקבוצות עדיף הפעם שלא להשתמש בחסמים הכלליים שנלמדו בכיתה. במקום זה לכל קבוצה F בת $(C+1)n$ זוגות אפשריים של צומת מ- V_1 וצומת מ- V_2 , נבחן את המאורע שבין V_1 ל- V_2 אין אף קשת שאינה ב- F , ונכפיל זאת במספר הבחירות האפשריות עבור F . נקבל את החסם:

$$\binom{\frac{1}{4}n^2}{(C+1)n} \cdot (1 - n^{(1-C)/C})^{n^2/4} < n^{4Cn} \cdot e^{-n^{(1-C)/C} \cdot n^2/4} = e^{n(4C \log n - n^{1/C}/4)} = o(2^{-n})$$

בסופו של דבר נכפיל חסם זה במספר החלוקות האפשריות עבור V_1, V_2 , שבוודאי חסום ע"י 2^n (הוא אפילו $o(2^n)$ בגלל התנאי על גודל הקבוצות). נקבל שה"כ הסתברות של $o(1)$ לקיום חלוקה לא טובה. מכאן שעבור n גדול דיו, בסיכוי גדול מ-0 הגרף שהוגרל ע"י $G(n, p)$ יהיה כזה שלאחר הסרת הקשתות כפי שתואר למעלה הוא יקיים את כל שנדרש מתנאי השאלה.

פתרונות לתרגיל השלישי

הילוך מקרי על הקוביה

אנו נגדיר מרטינגל חשיפה D_0, \dots, D_n עבור המרחק הסופי d_n , כאשר בצעד ה- i חושפים את $(x^{(0)}, \dots, x^{(i)})$. שימו לב שבד"כ D_i אינו שווה ל- d_i עבור $i < n$ (אבל כמובן $D_n = d_n$). לא קשה לראות שמרטינגל זה יקיים את תנאי ליפשיץ, ולכן לפי משפט אזומה יתקיים לכל $\alpha > 0$ החסם $\Pr[D_n < E[D_n] - \alpha n] \leq 2^{-\Omega(n)}$. על מנת להשלים את ההוכחה על כן צריך רק להראות שמתקיים $E[D_n] = \Omega(n)$. על מנת להוכיח זאת, מספיק להוכיח שקיים $\beta > 0$ כך שבסיכוי חסום מלמטה (ע"י קבוע גדול מ-0) מתקיים $D_n \geq \beta n$. זאת מכיוון שגם $\Pr[D_n \geq E[D_n] + \frac{1}{2}\beta n] \leq 2^{-\Omega(n)}$, ולכן לא יתכן אז $E[D_n] < \frac{1}{2}\beta n$.

אפשרות אחת לחסם כזה היא שימוש בבעית אספן הקופונים. תוחלת מספר הערכים ב- $\{1, \dots, n\}$ שאינם זהים לאף j_i היא $(1 + o(1))e^{-1}n$, ולכן עבור n גדול דיו יש (לפי אי שוויון מרקוב) הסתברות לפחות $\frac{1}{12}$ שמספר הערכים הנ"ל הוא לא יותר מ- $\frac{11}{10}e^{-1}n$ (יש חסמים הרבה יותר הדוקים כאן, אבל לא נצטרך אותם). במקרה שזה קורה לא קשה לראות עבור $\beta = (1 - \frac{22}{10}e^{-1}) > 0$ שאכן מתקיים $d_n > \beta n$.

פונקציות מונוטוניות מקריות

אנו נשתמש במשפט ארבעת הפונקציות, כאשר נתיחס לפונקציה $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ כאל תת קבוצה A_f של $S = \{0, 1\}^n$ ע"פ $A_f = \{x: f(x) = 1\}$. עתה נסמן ב- \mathcal{M} את משפחת הפונקציות המונוטוניות, ב- \mathcal{A} את הפונקציות המונוטוניות המקבלות ערך 1 על y , וב- \mathcal{B} את הפונקציות המונוטוניות המקבלות ערך 1 על \bar{y} .

בדומה להוכחה של משפט Kleitman, אנו מקבלים ע"י שימוש בפונקציות ה-1 המתאימות את אי השוויון $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$. עתה יש לשים לב ש- $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ הוא בדיוק קבוצת הפונקציות המונוטוניות המקבלות 1 גם על y וגם על \bar{y} , וכן לשים לב לעובדה שכל איבר ב- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ הוא בפרט פונקציה מונוטונית, ולכן מתקיים גם $|\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}| \cdot |\mathcal{M}| \leq |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$. חלוקת שני צדי אי השוויון ב- $|\mathcal{M}|^2$ תניב את המבוקש במושגים של הסתברויות.

שתי שאלות על הילוכים מקריים מהוססים

התכנסות להילוך הסטציונרי

ישנן שתי שיטות להוכיח זאת. נתחיל מהשיטה האלגברית: נניח ש- P היא מטריצת המעבר של הילוך המקרי (הלא-מהוסס) על הגרף ששלנו, ו- P' היא מטריצת המעבר של הילוך המהוסס. מתקיים אם כן $P' = \frac{1}{2}(P + I)$ כאשר I מסמנת את מטריצת היחידה. מכאן שיש ל- P' אותם ווקטורים עצמיים כמו ל- P , כאשר עבור כל ערך עצמי λ של P יהיה ערך עצמי $\lambda' = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$ של P' .

כל שנותר עתה הוא להיזכר בכך שכל הערכים העצמיים של P הם ממשיים (הוכח בכיתה), שערכם הוא בין 1 ל-1 (צוין בכתה), נובע מכך שהמדובר במטריצה שסכומי השורות שלה הם 1, ושיש רק ווקטור עצמי אחד, זה של ההתפלגות הסטציונרית, שעבורו הע"ע הוא 1 (זה נובע מקשירות הגרף, עובדה זו צוינה בכתה ללא הוכחה). נשים לב עתה שעבור $1 > \lambda > -1$ מתקבל $|\lambda'| < 1$ ורק עבור $\lambda = 1$ מתקבל $\lambda' = 1$, ומכאן של- P' כל הערכים העצמיים קטנים מ-1 בערך מוחלט פרט להתפלגות הסטציונרית שהיא ווקטור עצמי יחידי שערכו העצמי הוא 1. מכאן נובע המבוקש.

עתה נסקור בקצרה את שיטת ההוכחה השניה. אפשר להשתמש בשיטת הצימוד: אנו נגדיר שני הילוכים מקריים מהוססים $\underline{X} = X_0, X_1, \dots$ ו- $\underline{Y} = Y_0, Y_1, \dots$ אשר לשניהם יהיו את מטריצת המעבר P' , ההתפלגות הבלתי-מותנה של Y_0 (ולכן של כל Y_i) היא ההתפלגות הסטציונרית, ההתפלגות של \underline{X} היא זו של הילוך המקרי המקורי (מושג ע"י קביעת ההתפלגות של X_0 להיות זו של הילוך המקורי באופן ב"ת ב- Y_0), וכן מתקיים $\Pr[Y_i = X_i] \rightarrow 1$.

לשם כך נבחר את (X_0, Y_0) כמתואר למעלה, ועתה נתאר את המעבר (המקרי) מ- (X_i, Y_i) ל- (X_{i+1}, Y_{i+1}) . אם $X_i \neq Y_i$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $X_{i+1} = X_i$ ואת Y_{i+1} להיות שכן מקרי של Y_i לפי הגרף שלנו, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $Y_{i+1} = Y_i$ ואת X_{i+1} להיות שכן מקרי של Y_i לפי הגרף. אם $X_i = Y_i$, את בסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע $X_{i+1} = Y_{i+1} = X_i$, ובסיכוי $\frac{1}{2}$ נקבע את $X_{i+1} = Y_{i+1}$ להיות שכן מקרי של X_i . ההוכחה שאר התכונות מתקיימות (מטריצות המעבר הלא מותנות של X ושל Y , וכן התכנסות ההסתברות עבור המאורע $(X_i = Y_i)$ מושארת כתרגיל לקורא (עבור ההתכנסות, שימו לב שתמיד ניתן לחסום מלמטה את הסיכוי ש- $X_{i+n} = Y_{i+n}$ לכל צמד ערכים אפשרי של $(X_i \neq Y_i)$).

זמני הביקור

ניתן לעשות רדוקציה של השאלה עבור הילוך מקרי מהוסס על הגרף G לשאלה על הילוך מקרי רגיל על גרף חדש G' . הגרף G' יוגדר ע"י כך שנהפוך כל קשת $e = v_i v_j$ של G למסלול מאורך 2 שבמרכזו צומת חדש u_e . אם ל- G היו n צמתים ו- m קשתות, אז לגרף החדש יהיו $n' = n + m$ צמתים ו- $m' = 2m$ קשתות. בנוסף, שימו לב שאם בגרף הישן ההתנגדות השקולה בין s ל- t (כפי שהוגדרה בחוברת הקורס) היא R_{st} , אז בגרף החדש זו תהיה $R'_{st} = 2R_{st}$.

עתה נסמן ב- $\underline{Y} = Y_0, Y_1, \dots$ הילוך מקרי (לא מהוסס) על G' שמתחיל בצומת s (שקיימת גם ב- G וגם ב- G'). שימו לב עתה שסדרת המ"מ עם האינדקסים הזוגיים Y_0, Y_2, \dots מתפלגת בדיוק כמו הילוך מקרי מהוסס על הגרף המקורי G , בעוד שהמ"מ במקומות האי-זוגיים Y_1, Y_3, \dots לעולם לא יקבלו ערכים המתאימים לצמתי הגרף המקורי, ובפרט לא יוכלו לקבל את t . מכאן שיזמן הביקור הממוצע בין s ו- t לפי הילוך המהוסס על G זהה בדיוק למחצית זמן הביקור הממוצע בין s ל- t לפי הילוך הלא-מהוסס על G' . נסמן ב- \hat{k}_{st} את זמן הביקור לפי הילוך המהוסס, ב- k'_{st} את זמן הביקור לפי הילוך על G' , וב- k_{st} את זמן הביקור לפי הילוך לא מהוסס על G . כל שנתר עתה הוא לכתוב:

$$\hat{k}_{st} = \frac{1}{2} k'_{st} = m' R'_{st} = 4m R_{st} = 2k_{st}$$