פתרונות לתרגיל האפס

1. קרבה בין התפלגויות

א. נסמן ב־$\overline{E}$ את המאורע המשלים ל־E. מתקיים $\Pr_P[\overline{E}] - \Pr_Q[\overline{E}] = \Pr_Q[E] - \Pr_P[E]$, כי $\Pr_P[\overline{E}] + \Pr_P[E] = \Pr_Q[\overline{E}] + \Pr_Q[E] = 1$. מכאן מתקבל:

$$\begin{aligned}
|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| &= \frac{1}{2}|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| + \frac{1}{2}|\Pr_P[\overline{E}] - \Pr_Q[\overline{E}]| \\
&= \frac{1}{2}|\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| + \frac{1}{2}|\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{i\in E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| + \frac{1}{2}\sum_{i\notin E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| = d(P,Q)
\end{aligned}$$

ב. נגדיר את $E = \{i \in [n] : \Pr_P(i) > \Pr_Q(i)\}$. במקרה זה מתקיימים

$$\begin{aligned}
|\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| &= \textstyle\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)) &= \sum_{i\in E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| \\
|\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| &= -\textstyle\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)) &= \sum_{i\notin E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)|
\end{aligned}$$

ולכן מתקבל שוויון בפיתוח למעלה, ז"א $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| = d(P,Q)$.

2. התפלגויות מותנות

משתמשים במשפט Bayes ואח"כ באי שוויון המשולש:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr[X=i] - \Pr[Y=i]| &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[(X=i)\cap E] + \Pr[(X=i)\cap\neg E] \\
&\qquad -\Pr[(Y=i)\cap E] - \Pr[(Y=i)\cap\neg E]\Big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|E]\Pr[E] + \Pr[X=i|\neg E]\Pr[\neg E] \\
&\qquad -\Pr[Y=i|E]\Pr[E] - \Pr[Y=i|\neg E]\Pr[\neg E]\Big| \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|E]\Pr[E] - \Pr[Y=i|E]\Pr[E]\Big| \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|\neg E]\Pr[\neg E] - \Pr[Y=i|\neg E]\Pr[\neg E]\Big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|\neg E] - \Pr[Y=i|\neg E]\Big|\Pr[\neg E] \\
&\le \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Pr[X=i|\neg E] + \sum_{i=1}^{n}\Pr[Y=i|\neg E]\right)\Pr[\neg E] \\
&\le \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

3. התפלגויות מותנות - הכיוון השני

לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר $m_i = \min\{p_i, q_i\}$. מכיוון שמתקיים $|p_i - q_i| = p_i + q_i - 2m_i$, מתקיים גם

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|) = 1 - \epsilon$$

עתה צריך לשים לב ששלושת הסדרות המוגדרות באופן הבא הן ווקטורי התפלגות (ז"א שהערכים כולם אי שליליים וסכומם הוא 1).

$$\begin{aligned} m_i' &= m_i/(1-\epsilon) \\ p_i' &= (p_i - m_i)/\epsilon \\ q_i' &= (q_i - m_i)/\epsilon \end{aligned}$$

מרחב הסתברות שלנו יוגדר עתה לפי ערכי המ"מ X ו-Y המוגרלים באופן הבא: בהסתברות $1-\epsilon$ אנו נבחר גם ל-X וגם ל-Y ערך המוגרל מתוך $\{1, \ldots, n\}$ לפי ווקטור ההתפלגות $m_1', \ldots, m_n'$. בהסתברות הנותרת ϵ אנו נבחר באופן בלתי תלוי ל-X ערך המוגרל לפי $p_1', \ldots, p_n'$, ול-Y ערך המוגרל לפי $q_1', \ldots, q_n'$.

כדאי עתה לשים לב שלא קיים i עבורו גם p_i' וגם q_i' אינם אפס (מכיוון ש-m_i שווה לאחד מ-p_i, q_i), ולכן ההסתברות למאורע $X = i \wedge Y = j$ שווה בדיוק ל-m_i אם $i = j$, ושווה ל-$(p_i - m_i)(q_j - m_j)/\epsilon$ אם $i \neq j$. מכאן נובע שההסתברות של המאורע $X = Y$ היא בדיוק $1 - \epsilon$.

נותר עוד להוכיח שלמשתנים X ו-Y יש את ההתפלגויות (הבלתי-מותנות) הרצויות. נראה זאת לדוגמה עבור X (עבור Y ההוכחה זהה):

$$\begin{aligned} \Pr[X = i] &= m_i + \epsilon^{-1} \sum_{j \neq i} (p_i - m_i)(q_j - m_j) \\ &= m_i + \epsilon^{-1}(p_i - m_i) \sum_{j=1}^{n} (q_j - m_j) \\ &= m_i + \epsilon^{-1}(p_i - m_i)(1 - (1 - \epsilon)) = p_i \end{aligned}$$

פתרונות לתרגיל הראשון

תרגיל בהסתברות

אפשר לפתור את השאלה באמצעות חישוב ישיר, אולם במקום זאת נראה כאן דרך המשתמשת בתוצאות שהוכחו בתרגיל האפס. נגדיר מרחב הסתברות על זוגות של מחרוזות $x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k$ באופן הבא: לכל i נבחר את x_i ואת y_i באופן ב"ת בבחירות עבור i אחרים (אולם באופן תלוי זה בזה). אם $\alpha_i > \beta_i$ אז בסיכוי β_i נבחר $x_i = y_i = 1$, בסיכוי $\alpha_i - \beta_i$ נבחר $x_i = 1$ ו־$y_i = 0$, ובסיכוי $1 - \alpha_i$ נבחר $x_i = y_i = 0$. אם $\alpha_i < \beta_i$ אז בסיכוי α_i נבחר $x_i = y_i = 1$, בסיכוי $\beta_i - \alpha_i$ נבחר $y_i = 1$ ו־$x_i = 0$, ובסיכוי $1 - \beta_i$ נבחר $x_i = y_i = 0$.

נשים לב עתה שההתפלגות (הלא־מותנה) על $x_1,\dots,x_k$ זהה ל־μ, ושההתפלגות (הלא־מותנה) על $y_1,\dots,y_k$ זהה ל־ν. כמו כן, לכל i מתקיים $x_i \neq y_i$ בהסתברות $|\alpha_i - \beta_i|$, ולכן ההסתברות ש־$x_1,\dots,x_k$ אינה זהה ל־$y_1,\dots,y_k$ חסומה ע"י $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i|$. מכאן (ע"פ השאלה השניה בתרגיל האפס) שזהו חסם על המרחק בין μ ל־ν.

סימולציה של התפלגות

א. נניח שהאלגוריתם משתמש רק ב־k הטלות מטבע. מכיוון שהאלגוריתם הוא דטרמיניסטי, ניתן לכל סידרת ערכים אפשריים של k ההטלות הראשונות לקבוע האם האלגוריתם יתן את הפלט "1" או לא במידה ואלו היו תוצאות ההטלות (אפשר להניח שהאלגוריתם תמיד מבצע k הטלות, גם אם אח"כ הוא אינו משתמש בכולן). ההסתברות לכל סדרה אפשרית היא 2^{-k}, וההסתברות לקבלת הפלט "1" אמורה להיות $\frac{1}{3}$, אולם לשום k אין כפולה של 2^{-k} השווה ל־$\frac{1}{3}$.

ב. נבצע את האלגוריתם הבא: בכל איטרציה האלגוריתם יטיל שני מטבעות. אם שניהם יצאו "עץ" אז האלגוריתם יבצע איטרציה נוספת. לכל תוצאה אחרת של ההטלה האלגוריתם יעצור, ויוציא פלט לפי התוצאה (למשל, "1" אם הראשון "עץ", "2" אם השני "עץ", "3" אם שניהם "פאלי").

מכיוון שבכל איטרציה הסיכוי לעצירה הוא $\frac{3}{4}$, תוחלת מספר ההטלות היא פעמיים התוחלת של ההתפלגות הגיאומטרית עם פרמטר $\frac{3}{4}$, ז"א $2(1+\frac{1-3/4}{3/4}) = \frac{8}{3}$, שהיא בוודאי סופית.

באשר להתפלגות הפלטים, מחשבים לכל i את ההתפלגות המותנה על כך שהאלגוריתם עצר בדיוק באיטרציה ה־i. לא קשה לראות שהתפלגות המותנה כאן היא ההתפלגות היוניפורמית על $\{1,2,3\}$, ומכיוון שזה נכון לכל ערך אפשרי של i אז הדבר נכון גם עבור ההתפלגות הלא־מותנה.

אוטומירפיזמים בגרף מקרי

לכל פרמוטציה $\sigma : V \to V$ שאינה הזהות, נסמן ב־E_σ את המאורע שהיא אוטומורפיזם של הגרף הנבחר G, ואז נראה שסכום ההסתברויות על כל הפרמוטציות האפשריות הוא $o(1)$ כנדרש. אם נסמן ב־$k(\sigma)$ את מספר זוגות הצמתים של G שהפרמוטציה "מזיזה" (ז"א מספר הזוגות $\{u,v\}$ עבורם $\{u,v\} \neq \{\sigma(u),\sigma(v)\}$), אז נשים לב שמתקיים $\Pr[E_\sigma] \le 2^{-k(\sigma)/2}$. הסיבה לכך היא שאפשר לקחת $l = k(\sigma)/2$ זוגות $\{u_1,v_1\},\ldots,\{u_l,v_l\}$ כך שאף זוג לא מועבר ע"י σ לא לעצמו ולא לאף זוג אחר (אפשר לעשות זאת ע"י אלגוריתם חמדן), ואז המאורע ש־$\{u_i,v_i\}$ נמצא באותו סטטוס (קשת/לא־קשת) כמו $\{\sigma(u_i),\sigma(v_i)\}$ הוא בלתי תלוי במאורעות המקבילים לכל $j \neq i$. השלב הבא הוא שתי הטענות הבאות:

- לכל פרמוטציה σ שאינה הזהות, $k(\sigma) \ge n-2$. הסיבה לכך היא שאם נבחר צומת u כך ש־$\sigma(u) \neq u$, אז לכל v השונה מ־u ומ־$\sigma(u)$ יתקיים $\{u,v\} \neq \{\sigma(u),\sigma(v)\}$ (כן יתכן אבל שהזוג $\{u,\sigma(u)\}$ "מתהפך" במקום לעבור לזוג שונה).
- לכל פרמוטציה σ המעבירה לפחות $\sqrt{n}$ צמתים ממקומם, $k(\sigma) \ge n^{3/2}/2$. הסיבה לכך היא שאם ניקח צמתים $u_1,\ldots,u_{\sqrt{n}}$ המועברים ממקומם, וצמתים $v_1,\ldots,v_{n/2}$ כך שאף v_j לא שווה לאף u_i ולאף $\sigma(u_i)$, אז כל הזוגות האפשריים $\{u_i,v_j\}$ מקיימים $\{u_i,v_j\} \neq \{\sigma(u_i),\sigma(u_j)\}$.

עתה לא נותר אלא לסכם את ההסתברויות: מספר הפרמוטציות אשר מעבירות פחות מ־$\sqrt{n}$ צמתים ממקומם חסום ע"י $\binom{n}{\sqrt{n}}^2(\sqrt{n})! \le 2^{3\sqrt{n}\log n}$ ולכן הסיכוי שאחת או יותר מתוכן תהיה אוטומורפיזם חסום ע"י $2^{3\sqrt{n}\log n-(n-2)/2} = o(1)$. מספר כל שאר הפרמוטציות חסום ע"י $n! \le 2^{n\log n}$, והסיכוי שאחת או יותר תהיה אוטומורפיזם חסום ע"י $2^{n\log n-n^{3/2}/4} = o(1)$. לסיכום קיבלנו שסכום כל ההסתברויות על המאורעות E_σ הוא $o(1)$, כמבוקש.

פתרונות לתרגיל השני

מציאת קשתות בהיפרגרף

ראשית נשים לב לכך שע"פ הנתונים אף צומת לא נמצא ביותר מ-$\frac{1}{20}n^{3/2}$ קשתות של ההיפרגרף, בגלל הנתון על כל זוג צמתים. מכאן נובע שלכל קשת בהיפרגרף אין יותר מ-$\frac{3}{10}n^{1/2}$ קשתות אחרות החולקות איתה זוג צמתים, ולא יותר מ-$\frac{3}{20}n^{3/2}$ קשתות אחרות החולקות איתה צומת יחיד.

נניח עתה שבהיפרגרף H יש n^2 קשתות בדיוק (אחרת פשוט נסיר ממנו חלק מהקשתות; לא קשה לראות ששאר תנאי השאלה ימשיכו להתקיים שם לאחר ההסרה). לכל קשת e של H נסמן ב-X_e את משתנה האינדיקטור שכל שלושת צמתי e נבחרו. מכאן ש-$X = \sum_e X_e$ הוא המ"מ של מספר הקשתות המוכלות בקבוצת הצמתים המקרית שלנו, ועלינו להוכיח כי מתקיים $\Pr[X = 0] \leq \frac{1}{2}$.

נרצה לעשות זאת בשיטת המומנט השני, ולכן ראשית נחשב את התוחלת:

$$\mathrm{E}[X] = n^2(10n^{-1/2})^3 = 1000n^{1/2}$$

עתה נחשב את השונות. במהלך החישובים נשתמש בכך שלמ"מ אי-שליליים תמיד מתקיים $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \leq \mathrm{E}[X,Y]$, וכן בכך שהקווריאנס של מ"מ ב"ת הוא 0:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}[X] &= \sum_{e,f} \mathrm{Cov}[X_e, X_f] \\
&\leq n^2 \cdot (10n^{-1/2})^3 + n^{2+1/2} \cdot (10n^{-1/2})^4 + n^{2+3/2} \cdot (10n^{-1/2})^5 = 11000n^{1/2} + 10^5 n
\end{aligned}$$

לא קשה לראות עתה שמתקיים $\mathrm{V}[X]/(\mathrm{E}[X])^2 \leq \frac{1}{2}$, ולכן מתקיים $\Pr[X = 0] \leq \frac{1}{2}$ ע"פ אי שוויון צ'בישף.

קבוצה דומיננטית בגרף

נבצע את הפרוצדורה הבאה להגרלה של קבוצת צמתים דומיננטית בגרף: A תוגרל ע"י כך שכל צומת ב-V יבחר באופן ב"ת תלוי בהסתברות p (שנקבע אותה אח"כ). B תהיה קבוצת כל הצמתים ללא שכן ב-A. ברור ש-$A \cup B$ היא קבוצה דומיננטית ב-G, ועתה נחשב את תוחלת הגודל שלה: התוחלת של A היא $p|V| = pn$. הסיכוי של צומת v להיכנס ב-B הוא הסיכוי שלא הוא ולא אף אחד משכניו נמצא ב-A, ומכיוון שיש לו לפחות d שכנים סיכוי זה חסום ע"י $(1-p)^{d+1}$. לכן התוחלת של $A \cup B$ היא סכום התוחלות, $n(p + (1-p)^{d+1})$. לסיום, נבחר $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$ ונקבל $n(p + (1-p)^{d+1}) < n(\frac{\ln(d+1)}{d+1} + e^{-\ln(d+1)}) = \frac{1+\ln(d+1)}{d+1}n$.

בידוד של שני מבנים

ההוכחה נעשית בדומה להוכחה של למת הבידוד המקורית. עבור פונקציה המשקל שנבחרה w. נגדיר לכל $a \in A$ את הערכים הבאים: W_a - המשקל המינימלי מבין כל איברי $\mathcal{F}$ המכילים את a. $\overline{W}_a$ - המשקל המינימלי מבין אלו שאינם מכילים את a. W'_a - המשקל של האיבר בעל המשקל השני הכי קטן מאלו שמכילים את a. $\overline{W}'_a$ - המשקל של האיבר השני הכי קל מאלו שאינם מכילים את a.

נקרא לאיבר a "חד משמעי ביותר" אם גם $W_a \neq \overline{W}_a$ וגם $W_a \neq \overline{W}'_a$ וגם $W'_a \neq \overline{W}_a$. בדומה להוכחת הלמה המקורית, הערכים $\overline{W}_a$, $\overline{W}'_a$, $W_a - w(a)$ ו-$W'_a - w(a)$ כולם אינם תלוים בערך $w(a)$, אלא רק בערכים של w עבור האיברים ב-$A \setminus \{a\}$. על כן כל אחד מאי השוויונים הרצויים מתקיים בהסתברות לפחות $1 - \frac{1}{n}$, ומכאן שכולם יתקיימו בהסתברות לפחות $1 - \frac{3}{n}$. לכן (שוב ע"י שימוש בחסם על איחוד מאורעות) בהסתברות לפחות $1 - \frac{3m}{n}$ כל איברי A הם חד משמעיים ביותר. עתה כל שנותר להוכיח הוא שבהינתן שכל איברי A מקיימים זאת, גם האיבר של $\mathcal{F}$ בעל המשקל המינימלי וגם האיבר בעל המשקל השני הכי קטן הם יחידים.

האיבר בעל המשקל המינימלי הוא יחיד מכיוון שע"פ ההנחה, כל איברי A הם בפרט חד משמעיים במובן של ההוכחה המקורית של למת הבידוד. נסמן איבר זה ב-F. עתה, נניח בסתירה שיש שני איברים $G_1, G_2 \in \mathcal{F}$ בעלי אותו משקל שהוא השני הכי קטן ב-$\mathcal{F}$. בלי הגבלת הכלליות, נניח שקיים איבר $a \in A$ השייך ל-G_1 ואינו שייך ל-G_2. עתה קיימים שני מקרים.

אם $a \in F$, אז $W'_a = w(G_1)$, מכיוון שמבין כל איברי $\mathcal{F}$ המכילים את a האיבר F הוא (היחיד) בעל המשקל המינימלי ו-G_1 הוא בעל המשקל השני הכי קטן. בנוסף לכך, $\overline{W}_a = w(G_2) = w(G_1)$, מכיוון שמבין האיברים שאינם מכילים את a האיבר G_2 יהיה בעל המשקל המינימלי (שהרי F אינו נמצא שם). בזאת קיבלנו סתירה ל-$W'_a \neq \overline{W}_a$. באותו האופן, עבור המקרה $a \notin F$ נקבל סתירה ל-$W_a \neq \overline{W}'_a$, ושני המקרים ביחד מסיימים את ההוכחה.

מחלקות סיבוכיות

נניח ש-L היא שפה השייכת ל-BPP, ונוכיח שהיא ב-P/poly. נניח ש-$p(n)$ הוא חסם זמן פולינומי עבור אלגוריתם הסתברותי המכריע את L, וכן נניח שאלגוריתם זה משתמש רק בבחירות יוניפורמיות ב"ת מתוך $\{0,1\}$ ("הטלות מטבע"). ולכל n נבנה אלגוריתם דטרמיניסטי שנותן תשובות נכונות עבור כל המילים מאורך n, כך שגם זמן הריצה וגם אורך התיאור שלו חסומים ע"י החסם הפולינומי $O(np(n))$.

האלגוריתם ההסתברותי המקורי משתמש עבור מילים מאורך n בלא יותר מ-$p(n)$ מטבעות (הגרלות יוניפורמיות ב"ת מ-$\{0,1\}$), ולכן ניתן לתאר אותו ע"י בחירה מקרית יוניפורמית של מחרוזת ב-$\{0,1\}^{p(n)}$, שבהסתמך עליה ועל הקלט האלגוריתם מגיע להכרעה דטרמיניסטית (כל פעם שהאלגוריתם אמור להטיל מטבע, קוראים במקום זאת את הערך הבא מהמחרוזת שהוגרלה).

עתה נגריל באופן ב"ת $100n$ מחרוזות בינאריות מאורך $p(n)$ ונסמנן $\alpha_1, \ldots, \alpha_{100n}$, ונבחן את $100n$ ההרצות האפשריות של האלגוריתם המתקבלות מהן. אם $a \in \{0,1\}^n$ היא מילה בשפה, אז לפי חסימת סטיות גדולות, הסיכוי שהיא תתקבל עבור לא יותר מ-$51n$ מההרצות הנ"ל חסום ע"י 2^{-n-1} (ולמעשה פחות מכך). בדומה לכך, אם $a \in \{0,1\}^n$ אינה ב-L אז הסיכוי שהיא תתקבל עבור לא פחות מ-$49n$ מההרצות חסום ע"י 2^{-n-1}.

מכאן נובע שקיימת בחירה של $\alpha_1, \ldots, \alpha_{100n}$ שעבורה לכל מילה $a \in \{0,1\}^n$, מילה זו מתקבלת ע"י רב ההרצות המתאימות ל-$\alpha_1, \ldots, \alpha_{100n}$ אם ורק אם $a \in L$. עתה אנו יכולים להרכיב את האלגוריתם שלנו עבור מילים מאורך n עבור הבחירה הנ"ל (שתהווה חלק מתיאור האלגוריתם): בהינתן $a \in \{0,1\}^n$, לכל α_i נבצע את ההרצה המתאימה (באופן דטרמיניסטי בהסתמך על a ו-α_i) ונכתוב את התשובה. האלגוריתם שלנו יקבל את a אם ורק אם לפחות $50n$ מההרצות הנ"ל קיבלו את a.

פתרונות לתרגיל השלישי

בחירה של תתי קבוצות

לכל $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ נגדיר $p(S) = \Pr[A \subseteq S]$, ונגדיר את $X_0, \ldots, X_n$ להיות מרטינגל החשיפה של S כאשר מחשיבים אותה כפונקציה מקרית מ־$\{1, \ldots, n\}$ ל־$\{0, 1\}$ (ז"א ש־X_i יתאר את התוחלת המותנה של $p(S)$ עבור S מקרית בהינתן $S \cap \{1, \ldots, i\}$).

ברור שמתקיים $X_0 = \mathrm{E}[p(S)] = 2^{-k}$, וכן מתקיים בהסתברות 1 התנאי $|X_i - X_{i-1}| \leq \frac{k}{n}$ ־ זה מתקיים בגלל קיום של "תנאי ליפשיץ" מתאים, שהרי אם S ו־S' נבדלות ביניהן רק של הקורדינטה ה־i, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש־$S' = S \setminus \{i\}$, אז מתקיים $0 \leq p(S) - p(S') \leq \Pr[i \in A] = \frac{k}{n}$. מאי שוויון Azuma נובע עתה שבהסתברות $1 - o(1)$ (עבור n גדול דיו ביחס ל־k) המרחק בין X_s ל־X_0 הוא $o(1)$ כנדרש.

מרחקים בין פונקציות מונוטוניות

נסמן ב־K את קבוצת האפסים של f, ב־S את קבוצת האפסים של g, וכן נסמן $k = |K|$, $s = |S|$. בגלל הנתונים על מונוטוניות הפונקציות, גם K וגם $\{0,1\}^n \setminus S$ הן קבוצות מונוטוניות לא עולות (ביחס להכלה), ולכן מתקיים לפי משפט Kleitman אי השויון $(2^n - s)k = |\{0,1\}^n \setminus S||K| \leq 2^n|(\{0,1\}^n \setminus S) \cap K| = 2^n|K \setminus S|$. באופן דומה גם S וגם $\{0,1\}^n \setminus K$ הן מונוטוניות לא יורדות, ולכן מתקיים $s(2^n - k) \leq 2^n|S \setminus K|$.

מאלו נובע שמספר המקומות שבהם f ו־g נבדלות, שהם האיחוד הזר $(S \setminus K) \cup (K \setminus S)$, הוא לפחות $2^{-n}((2^n - s)k + s(2^n - k)) \geq 2^{-n} \min_{0 \leq s \leq 2^n}((2^n - s)k + s(2^n - k))$. מכיוון שהמינימום של פונקציה לינארית מתקבל על הקצוות, האגף הימני זהה ל־$2^{-n} \min\{2^n k, 2^n(2^n - k)\} = \min\{k, 2^n - k\}$ כנדרש.

צביעת קשתות בגרפים

נגריל לכל קשת בגרף צבע מ־$\{1, \ldots, c\}$ באופן יוניפורמי וב"ת, ונוכיח שבהסתברות חיובית אין מעגל מונוכרומטי. לכל מעגל K בגרף נבחר באופן שרירותי שלוש קשתות עוקבות בו, ונסמן ב־A_K את המאורע ששלושת הקשתות צבועות בשלושה צבעים שונים. בנוסף לכך, אם לשני מעגלים K_1, K_2 בחרנו את אותן שתי קשתות, אז נרשום את המאורע המתאים רק פעם אחת (נניח שרק ל־K_1, ואז נתעלם מ־K_2). מספיק להראות עתה שבהסתברות חיובית אף אחד מהמאורעות A_K לא יקרה.

לכל K מתקיים $\Pr[A_K] \leq 3c^{-1}$. בנוסף לכך, כל A_K הוא ב"ת בכל המאורעות אשר נרשמו עבור קשתות הזרות לקשתות שנבחרו מ־K. על כן A_K הוא ב"ת בכל המאורעות האחרים פרט ללא יותר מ־$9d^2$ מהם (יש 9 חפיפות־קשת אפשריות בין שני מסלולים מאורך 3, ומכיוון ש־d היא הדרגא המקסימלית יש לא יותר מעוד d^2 אפשרויות לבחור "קשתות המשך" למסלול החופף). בחירת של $c = 10d^2$ (למשל) תבטיח עתה שיתקיים $e3c^{-1}(9d^2) < 1$, כך שנוכל להשתמש במקרה הסימטרי של הלמה הלוקלית ולסיים את ההוכחה.

הערה: יש גם דרך לפתור את השאלה ללא שימוש בשיטה הסתברותית...

פתרונות לתרגיל הרביעי

פונקציות הרמוניות ואוטומורפיזמים

בהינתן הפונקציה ההרמונית ϕ עם תנאי שפה ψ, נסתכל על הפונקציה $\phi \circ \sigma$ המוגדרת ע"י $(\phi \circ \sigma)(v) = \phi(\sigma(v))$. זוהי גם פונקציה הרמונית עבור G עם תנאי שפה ψ ־ קיום תנאי השפה ברור מכך ש־σ שומרת על צמתי S, ועבור תנאי המיצוע משתמשים בכך שהאיזומורפיזם σ יעביר את שכני v לשכני $\sigma(v)$ ולהיפך:

$$\phi(\sigma(v)) = \frac{1}{d(\sigma(v))} \sum_{(u,\sigma(v)) \in E} \phi(u) = \frac{1}{d(v)} \sum_{(w,v) \in E} \phi(\sigma(v))$$

עתה נובע מיחידות הפונקציה ההרמונית שמתקיים $\phi \circ \sigma = \phi$, הווה אומר שלכל $v \in V$ מתקיים $\phi(\sigma(v)) = \phi(v)$, כנדרש.

זמני פגיעה וקומטטיביות

נחקור מעט את h_{st}: לפי מה שנאמר בכיתה, $h_{st} \leq k_{st} = 2mR_{st}$, כאשר R_{st} הוא ההתנגדות השקולה של הרשת החשמלית המתאימה לגרף בין s ל־t. מצד שני, אם נסמן ב־$d(s,t)$ את המרחק (אורך המסלול הקצר ביותר) בין s ל־t, אז מתקיים $R_{st} \leq d(s,t) \leq h_{st}$. אי השוויון הימני ברור, ואי השוויון השמאלי נובע מכך שהגרף מכיל לפחות מסלול אחד מאורך $d(s,t)$ בין s ל־t, ותוספת קשתות לגרף אינה יכולה להגדיל את ההתנגדות השקולה שלו, כך שהיא נשארת חסומה ע"י ההתנגדות השקולה של המסלול, $d(s,t)$.

מכיוון ש־$R_{st} = R_{ts}$, נובע מהדיון למעלה שגם h_{st} וגם h_{ts} נמצאים בין R_{st} לבין $2mR_{st}$. מנתון זה נובעת התוצאה המבוקשת.

משפט טוראן חוזר

ניתן לפתור את השאלה הזו באמצעות דה־רנדומיזציה של ההוכחה ההסתברותית שניתנה למשפט בקורס. המטרה שלנו תהיה אם כן למצוא סידור $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to V$ של הצמתים, כך שלפחות k מהצמתים יהיו מחוברים לכל אלו הקודמים להם בסדר. כזכור, עבור סידור מקרי תוחלת מספר הצמתים הנ"ל היא גדולה מ־$k - 1$, ולכן נרצה סדר שבו מספר הצמתים הוא לפחות תוחלת זו (ומכיוון שהוא מספר שלם, ינבע מכך שהוא לפחות k).

בשלב ה־i נבחר צומת מתוך $V \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(i-1)\}$ עבור $\sigma(i)$. מספר האפשרויות שעלינו לבדוק הוא $n - i$. עבור צומת $v \in V$ נסמן ב־A_v את המאורע שהוא מחובר לכל הצמתים שהופיעו פניו. לא קשה לחשב את $\Pr[A_v | \sigma(1), \ldots, \sigma(i)]$: אם $v \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}$ אז ההסתברות המותנה היא 0 או 1 בהתאם למה שכבר אירע. אחרת, הסתברות זו היא 0 אם $N(v) \not\supseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}$, או $\frac{1}{n-d(v)}$ במקרה הנותר (אז v עוד צריך להיות ממוקם לפני כל לא־שכניו, שאף אחד מהם עוד לא סודר עדיין).

כל החישובים הנ"ל בוודאי ניתנים להעשות בזמן פולינומי ב־n, ולכן ניתן לבחור בשלב ה־i ערך עבור $\sigma(i)$ שיקיים $\Pr[A_v | \sigma(1), \ldots, \sigma(i)] \geq \Pr[A_v | \sigma(1), \ldots, \sigma(i-1)]$. לאחר n שלבים קיבלנו סידור מלא $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to V$ שעבורו מספר הצמתים הטובים הוא לפחות התוחלת המקורית.