פתרונות לתרגיל הראשון

1. תרגיל בהסתברות

א. נסמן ב־$\overline{E}$ את המאורע המשלים ל־E. מתקיים $\Pr_P[\overline{E}] - \Pr_Q[\overline{E}] = \Pr_Q[E] - \Pr_P[E]$, כי $\Pr_P[\overline{E}] + \Pr_P[E] = \Pr_Q[\overline{E}] + \Pr_Q[E] = 1$. מכאן מתקבל:

$$\begin{aligned}
|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| &= \frac{1}{2}|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| + \frac{1}{2}|\Pr_P[\overline{E}] - \Pr_Q[\overline{E}]| \\
&= \frac{1}{2}|\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| + \frac{1}{2}|\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i\in E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| + \frac{1}{2}\sum_{i\notin E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| = d(P,Q)
\end{aligned}$$

ב. נגדיר את $E = \{i \in [n] : \Pr_P(i) > \Pr_Q(i)\}$. במקרה זה מתקיימים

$$\begin{aligned}
|\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| &= \textstyle\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)) &= \sum_{i\in E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| \\
|\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| &= -\textstyle\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)) &= \sum_{i\notin E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)|
\end{aligned}$$

ולכן מתקבל שוויון בפיתוח למעלה, ז"א $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| = d(P,Q)$.

2. הטלות מטבע

א. האלגוריתם יפעל בצורה הבאה: בכל שלב המטבע המקורית תוטל פעמיים. אם בהטלה הראשונה יצא "עץ" ובשניה "פלי", אז האלגוריתם כותב "עץ" ועוצר. אם בהטלה הראשונה יצא "פלי" ובשניה "עץ", האלגוריתם כותב "פלי" ועוצר. בכל אחד משני המקרים האחרים, האלגוריתם חוזר על עצמו (מבצע זוג הטלות נוסף וכו'). לא קשה להראות שהאלגוריתם, כאשר יעצור, יכתוב "עץ" בהסתברות $\frac{1}{2}$ ו־"פלי" בהסתברות $\frac{1}{2}$. באשר לתוחלת מספר ההטלות, הסיכוי לעצור בכל שלב הוא $2p(1-p) \geq p$, ולכן תוחלת מספר השלבים היא לכל היותר $1/p$. את זאת מכפילים בשתי ההטלות שמתבצעות בכל שלב, להשלמת ההוכחה.

ב. נפצל את ההוכחה לשני מקרים. אם קיים $k \leq \frac{1}{3p}$ כך שהאלגוריתם עוצר במידה ו־k ההטלות הראשונות של המטבע המקורית נותנות "פלי", אז האלגוריתם לא יבצע סימולציה של מטבע הוגנת: יש במקרה זה סיכוי של לפחות $\frac{2}{3}$ שהאלגוריתם אכן יעצר לאחר k פעמים שיצא "פלי", ואז התוצאה שהאלגוריתם נותן במקרה זה תצא בסיכוי לפחות $\frac{2}{3}$, שזה יותר מ־$\frac{1}{2}$ (כזכור לאלגוריתם אסור לבצע החלטות הסתברותיות נוספות, אלא רק להסתמך באופן דטרמיניסטי על הטלות המטבע כדי להחליט מתי לעצור ואיזה פלט לתת).

אם לא קיים k כמו במקרה הקודם, הרי שבמקרה זה בסיכוי לפחות $\frac{2}{3}$ כל $\frac{1}{3p}$ ההטלות הראשונות היו "פלי", ועד אז האלגוריתם לא עצר (ההחלטה האם לעצור תלויה אך ורק בתוצאות ההטלות). מכאן נובע שתוחלת מספר ההטלות של האלגוריתם הזה היא לפחות $\frac{2}{9p} = \Omega(1/p)$ כנדרש.

3. צביעת גרפים

הסרת הקשתות מתוך G תתבצע באופן הבא: ראשית מגרילים לכל צומת v של V צבע, באופן יוניפורמי וב"ת בצמתים האחרים, מתוך $\{1,\ldots,k\}$. לאחר זאת מסירים מ־G כל קשת אשר שני הצמתים שלה צבועים באותו צבע. ברור שהגרף הנותר הוא k־צביע, ע"י הצביעה שהוגרלה. תוחלת הקשתות שהוסרה היא $\frac{m}{k}$: כדי להוכיח זאת מגדירים לכל קשת $e \in E(G)$ משתנה אינדיקטור X_e עבור המאורע שקשת זו הוסרה, ומחשבים את $\mathrm{E}[\sum_{e\in E} X_e]$. בנוסף, בסיכוי חיובי (גדול מ־0) הוסרו יותר קשתות מהתוחלת הנ"ל (אם $k > 1$), כי בסיכוי חיובי כל הצמתים נבחרו להצבע בצבע "1", ואז כל m הקשתות הוסרו. לכן, בסיכוי חיובי הוסרו פחות מ־$\frac{m}{k}$ קשתות. לקיחת אחד המקרים שבהם המאורע הנ"ל מתקיים נותנת את הגרף המבוקש.

הערה: יש שיטות נוספות לפתרון התרגיל, כפי שהתבטאו בחלק מההגשות. אפשרות אחת היא לקבוע מראש את הצבעים של צמתי אחת הקשתות ולהגריל רק את צבעי שאר הצמתים. אפשרות אחרת היא לדאוג ש־n יתחלק ב־k (ע"י תוספת צמתים) ואז להגריל צביעה שבה כל צבע מופיע מספר זהה של פעמים.

4. קודים חסרי רישות

נניח ש־$\mathcal{F}$ אינה מכילה את המילה הריקה ε, כי קל לראות שאחרת מתקיים $\mathcal{F} = \{\varepsilon\}$, ובפרט מתקיים אי השוויון המבוקש. עתה נגדיר מרחב הסתברות על מילים מתוך $\mathcal{F} \cup \{\varepsilon\}$, באופן שבו לכל מילה $w \in \mathcal{F}$ מאורך $i = |w|$ יתקיים $\Pr[w] = 2^{-i}$. מכך נובע המבוקש, כי אז מתקיים $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i = \sum_{w\in F} \Pr[w] = 1 - \Pr[\varepsilon] \leq 1$.

מרחב ההסתברות יוגדר באופן הבא: נבחר מחרוזת בינארית אין־סופית s שכל איבר בה נבחר באופן יוניפורמי וב"ת מ־$\{0,1\}$. אם קיימת $w \in \mathcal{F}$ המהווה רישא של s, נבחר אותה. אם לא קיימת $w \in \mathcal{F}$ כזו, אז נבחר את ε. לא יתכן מצב שבו קיימת יותר ממחרוזת $w \in \mathcal{F}$ אחת המהווה רישא של s, בגלל הנתון ש־$\mathcal{F}$ לא מכילה שתי מחרוזות שאחת מהן היא רישא של השניה. בזאת הוגדר מרחב ההסתברות. לא קשה לראות שעבור $w \in \mathcal{F}$ מאורך i אכן מתקיים $\Pr[w] = 2^{-i}$, בגלל ש־w נבחרת אם ורק אם כל i התווים הראשונים ב־s זהים לתווים המתאימים מ־w.

פתרונות לתרגיל השני

1. קיום מסלול בגרף מכוון

אם נגריל לכל קשת ב־G משקל שנבחר יוניפורמית ובאופן ב"ת מהתחום $\{1,\ldots,n^2\}$, אז במידה ויש בגרף מסלול כל שהוא מ־s ל־t, לפי למת הבידוד בהסתברות של לפחות $\frac{1}{2}$ יהיה עתה מסלול יחידי עבורו סכום המשקלות הוא מינימלי; מכיוון שמסלול מינימלי הוא בהכרח פשוט, אפשר לראות כל מסלול כתתי קבוצה של הקשתות. בנוסף, המשקל של המסלול המינימלי בוודאי לא יעלה על n^3. את הרדוקציה מ־G לגרף החדש G' נבצע עתה באופן הבא.

ראשית, נבחר באופן יוניפורמי מספר $1 \le l \le n^3$. לכל צומת v בגרף המקורי, יהיו בגרף החדש $l+1$ צמתים שיסומנו $(v,0),\ldots,(v,l)$. עתה לכל קשת u,v בגרף המקורי נבחר יוניפורמית את המשקל $w(u,v)$ שלה מתוך $\{1,\ldots,n^2\}$, ונצרף לגרף החדש את כל הקשתות מהטיפוס $(u,i),(v,i+w(u,v))$ עבור $0 \le i \le l-w(u,v)$. הרדוקציה היא ב־$\mathrm{LogSpace}$ בגלל שאפשר "לשכוח" את $w(u,v)$ מייד לאחר כתיבת הקשתות המתאימות לה ב־G', ולשחרר את הזיכרון עבור משקל הקשת הבאה (אגב, בהרבה מודלים חשוביים מתירים לאלגוריתם עם מקום מוגבל לקבל מראש רשימה של כל הטלות המטבע שלא על חשבון הזיכרון שלו, אולם זה לא היה נוסח השאלה כאן).

עתה נבחן מה הסיכוי שיש ב־G' מסלול יחידי מ־$(s,0)$ ל־(t,l). אם בגרף G אין מסלול מ־s ל־t, אז לא קשה לראות שאין בגרף החדש כל מסלול מ־$(s,0)$ ל־(t,l). מצד שני, אם יש בגרף G מסלול כזה, אז מספר המסלולים בגרף החדש זהה למספר המסלולים ב־G שעבורם סכום המשקלות הוא בדיוק l (כולל מסלולים לא פשוטים). אם ב־G היה מסלול, אז בהסתברות של לפחות $\frac{1}{2}$ יהיה מסלול יחידי בעל משקל מינימלי. במידה וזה אכן קרה, ההסתברות ש־l יהיה שווה לאורך המסלול המינימלי היחיד היא n^{-3}. לכן בהסתברות $\frac{1}{2}n^{-3} = \Omega(n^3)$ שני המאורעות יקרו, ובמצב זה יהיה מסלול יחידי מ־$(s,0)$ ל־(t,l).

2. מספרי רמזי לא סימטרים

נסתכל על הגרף G בעל n הצמתים שבו כל זוג נבחר להיות קשת באופן ב"ת בהסתברות $n^{-1/3}$. תוחלת מספר העותקים של K_4 (הגרף השלם בעל 4 צמתים) בגרף זה היא $\frac{n}{12} > \binom{n}{4}(n^{-1/3})^{12}$, ולכן בהסתברות לפחות $\frac{5}{6}$ קיימים ב־G לא יותר מ־$\frac{n}{2}$ עותקים שונים של K_4. בנוסף, אם $n = \lfloor(\frac{k}{\log k})^2\rfloor$ (כאשר הלוגריתם כאן הוא בבסיס טבעי), אז הסיכוי שיש ב־G קבוצת צמתים ב"ת כל שהיא בגודל k חסום (עבור k גדול דיו) ע"י

$$\binom{n}{k}(1-n^{-1/3})^{\binom{k}{2}} < (\frac{en}{k})^k e^{-n^{-1/3}\binom{k}{2}} < (ek)^k e^{-k^{4/3}/\log k} = e^{k(1+\log k)-k^{4/3}/\log k} = o(1)$$

ולכן עבור כל k גדול דיו קיים גרף G בעל n צמתים שבו אין קבוצה ב"ת מגודל k וכן אין יותר מ־$\frac{n}{2}$ עותקים של K_4.

עתה נבחר את G' להיות הגרף המתקבל מ־G ע"י כך שלכל עותק של K_4 נסיר את אחד מצמתיו מ־G. ב־G' אין לא עותקים של K_4 ולא קבוצות ב"ת מגודל k, ומספר צמתיו הוא לפחות $\frac{1}{2}n = \Omega((k/\log k)^2)$, כנדרש.

3. סכומים מסומנים

ראשית נבדוק את השונות של המשתנה המקרי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i a_i$, כאשר $X_1, \ldots, X_n$ הם מ"מ הנבחרים יוניפורמית ובאופן ב"ת מ־$\{0,1\}$. מתקבל $\mathrm{V}[X] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \frac{n}{4}$, ולכן בהסתברות לפחות $\frac{3}{4}$ מתקיים $|X - \mathrm{E}[X]| \leq \sqrt{n}$. מכאן שלפחות $\frac{3}{4}2^n$ מהסכומים האפשריים $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ כאשר $x_i \in \{0,1\}$ הם בתחום $[\mathrm{E}[X] - \sqrt{n}, \mathrm{E}[X] + \sqrt{n}]$. לכן, לפחות שניים מהסכומים הנ"ל נמצאים במרחק שאינו עולה על $2\sqrt{n}/\frac{3}{4}2^n = O(\sqrt{n}/2^n)$ ביניהם. נסמן את המקדמים של שני הסכומים הנ"ל ב־$y_1, \ldots, y_n$ וב־$z_1, \ldots, z_n$, ונניח בלי הגבלת הכלליות שמתקיים $\sum_{i=1}^{n} y_i a_i \geq \sum_{i=1}^{n} z_i a_i$. לבסוף נבחר $s_i = y_i - z_i$; לא קשה לראות עתה שמתקיים $0 \leq \sum_{i=1}^{n} s_i a_i = \sum_{i=1}^{n} z_i a_i - \sum_{i=1}^{n} y_i a_i = O(\sqrt{n}/2^n)$, וכן שלא כל ה־$s_i$ הם אפס (אפילו אם הסכום הממושקל כן יוצא 0), בגלל ש־$y_1, \ldots, y_n$ ו־$z_1, \ldots, z_n$ הם שתי סדרות שונות של מקדמים.

פתרונות לתרגיל השלישי

1. קליקים בגרף מקרי

ראשית נראה שבסיכוי $1-2^{-\omega(n)}$ מתקיים, שבכל קבוצה בת לפחות $2n^{2/3}$ צמתים יהיה צומת המחובר לפחות ל־$\frac{1}{3}n^{2/3}$ מהצמתים האחרים: בהינתן קבוצה $U \subseteq V$ כזו, נחלק את U שרירותית לקבוצה U_1 ול־U_2, שתיהן בנות $n^{2/3}$ צמתים. עתה לכל $u \in U_1$, תוחלת מספר השכנים שלו ב־U_2 היא $\frac{1}{2}n^{2/3}$. ע"פ אי השוויון של חסימת סטיות גדולות (שהרי מספר השכנים הוא סכום של $n^{2/3}$ מ"מ ב"ת שכל אחד מהם נבחר יוניפורמית מ־$\{0,1\}$) הסיכוי שמספר השכנים יהיה קטן מ־$\frac{1}{3}n^{2/3}$ חסום ע"י $e^{-n^{2/3}/18}$. עתה נשים לב שהמאורע לכל צומת u ב־U_1 שמספר שכניו קטן מ־$\frac{1}{3}n^{2/3}$ הוא ב"ת במאורעות עבור צמתי U_1 האחרים (כי קבוצת הקשתות האפשריות לחיבורם עם U_2 זרה לזו של u), ולכן הסיכוי שלא יהיה קיים כלל צומת ב־U_1 עם מספיק שכנים חסום ע"י $(e^{-n^{2/3}/18})^{n^{2/3}} = e^{-\Theta(n^{4/3})} = 2^{-\omega(n)}$ כנדרש.

עתה נראה שבהנתן שהתנאי למעלה אכן מתקיים, יש בגרף קליק גדול כנדרש. לשם כך נבנה באינדוקציה קבוצות $V_0 \supset V_1 \supset \cdots$ ונבחר לכל i צומת $v_i \in V_i \setminus V_{i+1}$ כך שאלו יהיו צמתים של קליק. נתחיל עם $V_0 = V$, וכל עוד $|V_i| > n^{2/3}$ נבחר את v_i להיות צומת מ־V_i שמספר שכניו שם הוא לפחות $\frac{1}{3}|V_i|$, ואת V_{i+1} להיות קבוצת השכנים של v_i ב־V_i. ברור שהצמתים הנ"ל יהיו צמתים של קליק, וכן שתהליך זה לא יעצר לפני שעברו לפחות $\log_3(n^{1/3}) = \Omega(\log n)$ צעדים.

2. מרחק מקבוצת נקודות

הרעיון כאן הוא להראות שכאשר מגרילים באופן יוניפורמי נקודה $x = (x_1, \ldots, x_n)$ מ־$\{0,1\}^n$, בהסתברות לפחות $\frac{99}{100}$ המרחק שלה מ־A לא יעלה על $8\sqrt{n}$. לשם כך נסתכל על הנקודה המקרית כעל פונקציה מקרית באופן יוניפורמי מ־$\{1,\ldots,n\}$ ל־$\{0,1\}$, ונבנה מרטינגל חשיפה ביחס לפונקצית המרחק של x מ־A. המרטינגל "יחשוף" קורדינטה אחת בכל שלב, ז"א שהחשיפה תיעשה ביחס לתחום $\mathcal{D}_i = \{1,\ldots,i\}$ לכל $0 \le i \le n$. שימו לב שבמרטינגל המתקבל כך, הערך של X_i אינו מקבל את המרחק של הצמצום $(x_1,\ldots,x_i)$ מהצמצום המתאים של נקודות A. הערך של X_i שווה לתוחלת המותנה של המרחק הכולל בהינתן הערכים של $x_1,\ldots,x_i$, בהתאם להגדרה של מרטינגל חשיפה.

בחירת ערכי x על הקורדינטות היא ב"ת, ולכן לא קשה לראות שמתקיים תנאי ליפשיץ עבור המרטינגל מקיום תנאי ליפשיץ עבור התחומים: אם שתי נקודות נבדלות ביניהן רק על $\mathcal{D}_i \setminus \mathcal{D}_{i-1} = \{i\}$, אז המרחקים שלהן מ־$A$ בוודאי לא נבדלים ביותר מ־1. מכאן נובע ע"י אי שוויון Azuma שהסיכוי שמרחק זה יהיה קטן מהתוחלת שלו ביותר מ־$4\sqrt{n}$ אינו עולה על $\frac{1}{100} < e^{-8}$. מצד שני, בסיכוי לפחות $\frac{1}{100}$ המרחק המתקבל הוא 0, כי זהו הסיכוי ש־$x \in A$, ולכן תוחלת המרחק של x מ־A אינה עולה על $4\sqrt{n}$. מכאן נובע שבסיכוי לפחות $\frac{99}{100}$ (ע"י שימוש נוסף באי שוויון Azuma), המרחק של x מ־A אינו עולה בעצמו על $8\sqrt{n}$.

3. שיפור קל של החסם על משפט רמזי

על מנת להראות את תוצאת השאלה, צרים להראות בעצם שלכל $C < \sqrt{2}/e$ ולכל k גדול דיו (כפונקציה של ההפרש בין C ו־$\sqrt{2}/e$), קיים גרף בעל $Ck2^{k/2}$ צמתים ושאיו בו קליק או קבוצה ב"ת בת k צמתים.

נסתכל על הגרף $G(n, \frac{1}{2})$ עבור $n = Ck2^{k/2}$, ולכל קבוצת U בת k צמתים נגדיר את המאורע A_U שקבוצה זו מהווה קליק או קבוצה ב"ת. הסיכוי למאורע זה הוא $2^{1-\binom{k}{2}}$. כמו כן, כל מאורע A_U אינו תלוי בקבוצת כל המאורעות האחרים הנ"ל פרט ללא יותר מ־$\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} - 1$ מתוכם (כי $\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$ הוא חסם על מספר הקבוצות מגודל k אשר חותכות את U ב־2 מקומות לפחות, ול־$k > 2$ המספר האמיתי קטן ממש מהחסם). אנו נרצה להשתמש בגרסה הסימטרית של הלמה הלוקלית על מנת להוכיח שבסיכוי חיובי אף אחד מהמאורעות הנ"ל אינו קורה, ולשם כך עלינו להוכיח שמתקיים $e2^{1-\binom{k}{2}}\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} < 1$. שימוש בחסמים הידועים על בינומים ישלים את ההוכחה (שימו לב שהשוויון האחרון נכון רק תחת ההנחות על C):

$$\begin{aligned}
e2^{1-\binom{k}{2}}\binom{k}{2}\binom{n}{k-2} &< e2^{1+k/2-k^2/2} \cdot \frac{k^2-k}{2} \cdot (\frac{en}{k-2})^{k-2} \\
&= e2^{1+k/2-k^2/2} \cdot \frac{k^2-k}{2} \cdot (\frac{eCk}{k-2}2^{k/2})^{k-2} \\
&= (k^2-k)e^{k-1}2^{-k/2}C^{k-2}(1+\frac{2}{k-2})^{k-2} \\
&= O(k^2(\frac{eC}{\sqrt{2}})^k) = o(1)
\end{aligned}$$

ז"א שעבור k גדול דיו המכפלה הנ"ל אכן קטנה מ־1.

פתרונות לתרגיל הרביעי

1. צביעה מאזנת

הרעיון הכללי הוא פשוט ־ מגרילים את הצביעה באופן מקרי ומשתמשים בחסימת סטיות גדולות. על מנת להשיג את המקדם המדוייק שבשאלה, ראשית נחלק את $\{1,\ldots,m\}$ לזוגות. לכל זוג $\{2i,2i+1\}$, נגריל באופן יוניפורמי, וב"ת בזוגות האחרים, את אחד משני הצבעים עבור $2i$, ונצבע את $2i+1$ בצבע השני.

לכל קבוצה $A\in\mathcal{A}$, תהי A' קבוצת כל המספרים i עבורם אחד בדיוק מאיברי הזוג $\{2i,2i+1\}$ הוא איבר ב־A. זוג שכולו נמצא ב־A או כולו אינו נמצא ב־A אינו תורם להפרש מספר הצמתים הצבוע בכל צבע, ולכן הפרש זה הוא סכום של $|A'|$ משתנים מקריים ב"ת שכל אחד מהם מקבל 1 או -1 בהתפלגות יוניפורמית. ההסתברות שערכו המוחלט של הפרש זה עולה על $\sqrt{m\ln(2n)}$ קטנה מ־$\frac{1}{n}$ $2e^{-m\ln(2n)/2|A'|}\le 2e^{-\ln(2n)}=\frac{1}{n}$ לפי החסם על סטיות גדולות, ולכן לפי החסם על איחוד מאורעות הסיכוי שתהיה קיימת ב־$\mathcal{A}$ קבוצה A עם הפרש גדול מתנאי השאלה הוא קטן מ־1. לכן קיימת צביעה שעבורה אין קבוצה כזו, כנדרש.

2. משולשים בגרף מקרי דליל

על מנת לפתור את השאלה, צריך ראשית לשים לב לכך שניתן להוכיח באינדוקציה את ההכללה הבאה של משפט FKG: אם $\mu:\mathcal{P}(S)\to\mathbb{R}^+$ היא פונקציה לוג־סופר־מודולרית, ולכל $t\in T$ (כאשר T היא קבוצת אינדכסים סופית כל שהיא) הפונקציה $f:\mathcal{P}(S)\to\mathbb{R}^+$ היא מונוטונית לא יורדת, אז מתקיים

$$\prod_{t\in T}\left(\sum_{E\subseteq S}\mu(E)f_t(E)\right)\le\left(\sum_{E\subseteq S}\mu(E)\prod_{t\in T}f_t(E)\right)\left(\sum_{E\subseteq S}\mu(E)\right)^{|T|-1}$$

לכל שלשת צמתים $t=\{u,v,w\}$ נגדיר כ־A_t את המאורע שהגרף המקרי שלנו מכיל משולש על t. ברור שמתקיים $\Pr[A_t]=\alpha^3/n^3$ לכל שלשה t. אנו נרצה עתה להשתמש במשפט FKG, אולם על מנת שהפונקציות יהיו מונוטוניות בכיוון המתאים עלינו להסתכל לא על הגרף המקרי G, אלא על הגרף המשלים $\overline{G}$. לכל קבוצה של זוגות צמתים $E\subseteq[V]^2$ נגדיר את $\mu(E)=(1-\frac{1}{n})^{|E|}n^{-|E|}$ להיות ההסתברות ש־E היא קבוצת הקשתות של $\overline{G}$, ולכל שלשת צמתים t נגדיר את $f_t(E)$ להיות שווה ל־0 אם E אינה מכילה קשתות על t (ואז G מכיל משולש על t), ולהיות שווה ל־1 אם E מכילה קשת אחת או יותר על t. נשים לב עתה שמתקיים $\sum_{E\subseteq[V]^2}\mu(E)f_t(E)=\Pr[\neg A_t]$, וכן שהפונקציות μ ו־f_t (לכל t) מקיימות את תנאי משפט FKG (כפי שהוכלל למעלה לקבוצה של יותר מ־2 פונקציות). מכאן נובע שמתקיים:

$$\prod_t\Pr[\neg A_t]\le\left(\sum_{E\subseteq[V]^2}\mu(E)\prod_t f_t(E)\right)\left(\sum_{E\subseteq[V]^2}\mu(E)\right)^{\binom{n}{3}-1}=\Pr[\bigwedge_t\neg A_t]$$

ולכן בפרט הסיכוי ש־G לא יכיל משולש הוא לפחות $(1-\alpha^3/n^3)^{\binom{n}{3}}$. הגבול של מספר זה הוא $e^{-\alpha^3/6}>0$, ולכן עבור n גדול דיו הסיכוי הנ"ל יהיה חסום מלמטה ע"י $\frac{1}{2}e^{-\alpha^3/6}$, שאותו נוכל להגדיר כ־$\beta$.

3. התכנסות הילוכים מקריים

אפשרות אחת להוכיח זאת היא בשיטה אלגברית, ע"י כך שמוכיחים שלמטריצת המעבר $Q = \frac{1}{2}(P+I)$ יש ע"ע 1 עם ריבוי אלגברי 1 (וכן שהווקטור העצמי המתאים הוא ווקטור ההתפלגות הסטציונרית של ההילוך המקרי המקורי), ושבנוסף לכך כל שאר הע"ע של Q הם בעלי ערך מוחלט קטן ממש מ־1. אפשרות שניה, יותר נוחה, להוכיח את תוצאת השאלה היא באמצעות שיטת הצימוד, ואותה נראה כאן.

בנוסף לשרשרת מרקוב שלנו $X_0, X_1, \ldots$ נגדיר סדרה שניה של משתנים מקריים, באופן הבא: Y_0 נבחר לפי ההתפלגות הסטציונרית של ההילוך המקרי המקורי (שלא קשה לראות כי היא גם התפלגות סטציונרית עבור שרשרת המרקוב שהוגדרה בשאלה). בהינתן X_{t-1} ו־Y_{t-1}, ראשית נבחר את X_t לפי מטריצת המעבר Q, ולאחר זאת נבחר את Y_t באופן הבא: אם $X_{t-1} = Y_{t-1}$ אז נבחר $X_t = Y_t$. אחרת, אם $X_t \neq X_{t-1}$, ז"א שבזמן t בחרנו לעשות צעד על הגרף המקורי, אז $Y_t = Y_{t-1}$; ואם $X_t = X_{t-1}$, אז עבור ערכו של Y_t נבחר שכן מקרי של Y_{t-1}, ז"א שבמקרה זה עבור Y_t נבצע צעד מקרי על הגרף המקורי.

הנקודה החשובה לשים לב כאן הוא ש־$Y_0, Y_1, \ldots$ היא גם שרשרת מרקוב עם אותה מטריצת מעבר Q, שכן ללא תלות בערך של X_{t-1} (או בערכים מוקדמים יותר של X_i או Y_i) ערכו של Y_t בהסתברות $\frac{1}{2}$ יהיה שווה לערכו של Y_{t-1}, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ הוא יבחר באמצעות ביצוע צעד מקרי אחד מהנקודה של Y_{t-1}. מכאן שההתפלגות הבלתי מותנה של Y_t (לכל t) היא גם ההתפלגות הסטציונרית של ההילוך המקרי המקורי.

על מנת לסיים את ההוכחה, יש להראות שמתקיים $\lim_{t\to\infty} \Pr[X_t = Y_t] = 1$. את זאת ניתן לעשות בדומה להוכחה שהילוך מקרי על גרף יגיע בסופו של דבר לכל נקודה: אם n הוא מספר המצבים ו־t ל־$X_t \neq Y_t$ כל שהוא, אז קיים חסם תחתון גדול מ־0 על הסיכוי עבור $X_{t+n} = Y_{t+n}$ (ושאינו תלוי בערכים הספציפיים של המ"מ), ומכך ניתן להסיק חסם סופי על תוחלת זמן המפגש בין שתי השרשראות. אפשרות אחרת היא להסתכל על סדרת זוגות הערכים $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), \ldots$, כל עוד אין שוויון בין X_t ו־Y_t, כעל הילוך מקרי על גרף גדול יותר (כתרגיל נסו לכתוב מהו גרף זה), ואז הדבר יתן חסם קטן יותר (פולינומי בלבד במספר הצמתים) על תוחלת זמן המפגש.

4. סיפוק משוואות לינאריות

ראשית נראה אלגוריתם יעיל למציאת הצבה אחת אשר תספק לפחות $\frac{1}{2}m$ מהמשוואות. נשים לב שאם ניקח הצבה מקרית שבה הערך של כל משתנה נבחר באופן יוניפורמי וב"ת אז תוחלת מספר המשוואות המסופקות היא $\frac{1}{2}m$. על מנת למצוא באופן דטרמיניסטי הצבה המספקת מספר משוואות לפחות כתוחלת זו, נשתמש בשיטת התוחלות המותנות: בשלב ה־i, נבחר ערך b_i עבור המשתנה x_i. לשם כך נחשב את התוחלת המותנה של מספר המשוואות המסתפקות על האפשרות לבחור $x_i = 1$ (בנוסף לבחירות הקודמות $x_1 = b_1, \ldots, x_{i-1} = b_{i-1}$), ועל האפשרות לבחור $x_i = 0$, ונבחר את b_i לפי האפשרות שעבורה התוחלת המותנה גדולה יותר. כפי שהוכח בשיעור במקרה של 3SAT, ההצבה של $b_1, \ldots, b_n$ עבור $x_1, \ldots, x_n$ תספק מספר משוואות לפחות כמו התוחלת, $\frac{1}{2}m$.

על מנת לפתור את השאלה, נריץ את האלגוריתם למעלה $\lfloor \log_2 m \rfloor + 1$ פעמים, כאשר בכל שלב מוצאים הצבה המספקת לפחות חצי מהמשוואות שלא סופקו קודם לכן, ומוחקים את המשוואות המסופקות מהמערכת עבור השלב הבא. לא קשה לראות שעבור מספר האיטרציות הנ"ל לאחר השלב האחרון כל המשוואות המקוריות יסופקו ע"י לפחות אחת מההצבות.