פתרונות לתרגיל הראשון

1. תרגיל בהסתברות

א. נסמן ב־$\overline{E}$ את המאורע המשלים ל־E. מתקיים $\Pr_P[\overline{E}] - \Pr_Q[\overline{E}] = \Pr_Q[E] - \Pr_P[E]$, כי $\Pr_P[\overline{E}] + \Pr_P[E] = \Pr_Q[\overline{E}] + \Pr_Q[E] = 1$. מכאן מתקבל:

$$\begin{aligned}
|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| &= \frac{1}{2}|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| + \frac{1}{2}|\Pr_P[\overline{E}] - \Pr_Q[\overline{E}]| \\
&= \frac{1}{2}|\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| + \frac{1}{2}|\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i\in E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| + \frac{1}{2}\sum_{i\notin E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in[n]}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| = |P - Q|
\end{aligned}$$

ב. נגדיר את $E = \{i \in [n] : \Pr_P(i) > \Pr_Q(i)\}$. במקרה זה מתקיימים

$$\begin{aligned}
|\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| &= \textstyle\sum_{i\in E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)) &= \sum_{i\in E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)| \\
|\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i))| &= -\textstyle\sum_{i\notin E}(\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)) &= \sum_{i\notin E}|\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)|
\end{aligned}$$

ולכן $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| = |P - Q|$.

2. חיפוש סופה של רשימה מקושרת

בפתרונות כאן אין נסיון לאופטימיזציה של המקדמים. נסו לראות איפה אתם יכולים לשפרם.

א. נראה שבסיכוי לפחות $\frac{1}{2}$ האלגוריתם יעצור לאחר $2\sqrt{n}$ שלבים. תהי A קבוצת $\sqrt{n}$ האיברים האחרונים ברשימה המקושרת. הסיכוי שבלפחות אחד מ־$\sqrt{n}$ השלבים הראשונים האלגוריתם בחר איבר מ־A (בכל שלב האלגוריתם מבצע גם מעקב אחרי הרשימה וגם בחירה אקראית של איבר) הוא לפחות $1 - (1 - \sqrt{n})^{\sqrt{n}} > 1 - e^{-1} > \frac{1}{2}$. במידה ואיבר מ־$A$ נבחר, האלגוריתם יעצור לאחר לא יותר מ־$\sqrt{n}$ שלבים נוספים, ומכאן החסם.

באשר לתוחלת זמן הריצה, נובע מכך שהסיכוי שהאלגוריתם יעצור לאחר יותר מ־$2k\sqrt{n}$ שלבים חסום ע"י 2^{-k}. לכן התוחלת חסומה ע"י $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}2k\sqrt{n} = 4\sqrt{n}$.

ב. נראה שבסיכוי לא יותר מ־$\frac{1}{2}$ האלגוריתם יעצור לאחר $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ שלבים; מכך נובע שתוחלת זמן הריצה היא לפחות $\frac{1}{4}\sqrt{n}$. נסמן את A כמקודם. הסיכוי שהאלגוריתם בחר איבר מ־A באחד מ־$\frac{1}{2}\sqrt{n}$ השלבים הראשונים הוא בוודאי לא יותר מ־$\frac{1}{2}$ (פשוט חוסמים את סכום הסיכויים למציאת איבר כזה). אם איבר כזה לא נבחר, אז האלגוריתם לא יעצור בשלבים אלו: אם נסמן ב־i את השלב האחרון שבו האיבר הנבחר אקראית היה בעל אינדקס גדול מהאיבר העוקב לזה של השלב הקודם, אז מכך שאיבר זה אינו ב־A נובע שהאלגוריתם לא היה יכול להגיע עד סוף הרשימה בשלבים הנותרים עד $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

3. קבוצות שולטות בגרפים

א. בהינתן גרף G בעל n צמתים ודרגה מינימלית לפחות $\frac{1}{2}n$, נגריל באופן מקרי, ב"ת ואחיד $2\log n$ צמתים מתוך G (על מנת לפשט את החישוב אנו מאפשר לצומת להיות מוגרל פעמיים או יותר). נסמן את הקבוצה שהוגרלה ב־A. לכל צומת v, הסיכוי שיש לו שכן ב־A הוא לפחות

$1 - 2^{-2\log n} = 1 - n^{-2}$. לכן ברור שבסיכוי לפחות $1 - n(n^{-2}) > 0$ לכל צמתי הגרף יש שכנים בקבוצה A. מכאן שקיימת קבוצה כזו.

ב. על מנת למצוא גרף שבו אין קבוצות שולטות קטנות, אפשר לבחור כל זוג באופן מקרי ונב"ת בהסתברות $\frac{7}{8}$ (במילים אחרות, לקחת את $G(n, \frac{7}{8})$). הסיכוי שלצומת v יש דרגה פחות מ־$\frac{1}{2}n$ חסום ע"י $\binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor} 8^{-\lfloor n/2 \rfloor} < 2^n 8^{-n/2} = 8^{-n/6}$, ולכן הסיכוי שקיים בכלל צומת כזה חסום ע"י $n8^{-n/6} = o(1)$. עתה, לכל קבוצה בת $\frac{1}{4}\log_2 n$ צמתים, הסיכוי שהיא שולטת חסום ע"י $(1 - 8^{-\log n/4})^{n - \log n/4} < e^{-8^{-\log n/4}(n - \log n/4)} < e^{-n^{1/4}/2}$. לכן הסיכוי שיש קבוצה שולטת כזו חסום ע"י

$$\binom{n}{\log n/4} e^{-n^{1/4}/2} < (\frac{en}{\log n/4})^{\log n/4} e^{-n^{1/4}/2} = e^{(1 + (\log n + 2 - \log\log n)/\log e))\log n/4 - n^{1/4}} = o(1)$$

בסיכום ההסתברויות מקבלים שבהסתברות $1 - o(1)$ קיבלנו גרף שדרגתו מינימלית היא לפחות $\frac{1}{2}n$ ועבורו אין קבוצה שולטת קטנה, כנדרש.

הערה: באמצעות חסימת סטיות גדולות אפשר להשתמש בגרף שבו כל זוג נבחר בהסתברות קבועה גדולה מ־$\frac{1}{2}$ כל שהיא, ולשפר בכך את המקדמים.

4. צביעת היפרגרפים

בהנתן היפרגרף k־יוניפורמי (עבור $k \geq 2$) עם קבוצת צמתים V וקבוצת קשתות E המקיימת $|E| = 2^k$, נגריל לכל צומת $v \in V$ באופן מקרי, אחיד ובנ"ת צבע $c(v) \in \{1, 2\}$. לכל $e \in E$ הסיכוי שקשת זו תהיה מונוכרומטית (צבועה בצבע אחד בלבד) הוא 2^{k-1}, ולכן תוחלת מספר הקשתות המונוכרומטיות היא 1. לעומת זו, מתקבלת בהסתברות חיובית צביעה שבה יש יותר מקשת מונוכרומטית אחת (למשל הצביעה שבה לכל v מתקיים $c(v) = 1$ מתקבלת בהסתברות $2^{-|V|} > 0$), ולכן מתקבלת בהסתברות חיובית צביעה שבה פחות מקשת אחת היא מונוכרומטית, ז"א שקיימת 2־צביעה חוקית להיפרגרף.

5. משולשים בגראפים

א. נסמן את קבוצת הצמתים ב־$V = \{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$, ויהי l המספר האי־זוגי המקסימלי עבורו $3l \leq k$. לכל $0 \leq i, j \leq l - 1$ נגדיר $T_{i,j} = \{v_j, v_{l + (j + i \bmod l)}, v_{2l + (j + 2i \bmod l)}\}$. נשים לב שלכל $(i, j) \neq (i', j')$ מתקיים $|T_{i,j} \cap T_{i',j'}| \leq 1$, ולכן אם נסמן ב־$P_{i,j}$ את המאורע שהשלשה $T_{i,j}$ היא משולש ב־$G(k, \frac{1}{2})$ נקבל אוסף של l^2 מאורעות ב"ת. לכן הסיכוי שאף אחד מהם לא יקרה (שחוסם את הסיכוי שאין כלל משולש) חסום ע"י $(\frac{7}{8})^{l^2} = 2^{-\Omega(k^2)}$.

ב. מהסעיף הקודם ידוע שקיים $C > 0$ כך שעבור k גדול דיו הסיכוי שקבוצה נתונה של k צמתים בגרף $G(n, \frac{1}{2})$ אינה מכילה משולש חסומה ע"י 2^{-Ck^2}. עבור n גדול דיו, נראה עתה שבסיכוי $1 - o(1)$ הגרף מקיים את התכונה הבאה: כל קבוצה בת $2C^{-1}\log_2 n$ צמתים מכילה משולש. לשם כך נחסום את הסיכוי לקיומה של קבוצה כזו שאינה מכילה משולש ע"י $\binom{n}{2C^{-1}\log n} 2^{-C(2C^{-1}\log n)^2} < n^{2C^{-1}\log n} 2^{-4C^{-1}\log^2 n} = 2^{-2C^{-1}\log^2 n} = o(1)$.

עבור כל גרף שהוא בעל התכונה הנ"ל לגבי כל תתי־הקבוצות של הצמתים שלו, האלגוריתם הבא ימצא בו $\frac{1}{3}(n - 2C^{-1}\log_2 n) = \frac{1}{3}n - O(\log n)$ משולשים: בכל שלב האלגוריתם יחפש משולש בצמתים שנותרו בגרף, יוסיף אותו לרשימת המשולשים, ויסיר את הצמתים שלו מהגרף. התכונה למעלה מבטיחה שהאלגוריתם יוכל להמשיך למצוא משולשים כל עוד גודל קבוצת הצמתים שנשארה הוא לפחות $2C^{-1}\log n$.

פתרונות לתרגיל השני

1. תרגיל בהסתברות

משתמשים במשפט Bayes ואח"כ באי שוויון המשולש:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr[X=i]-\Pr[Y=i]| &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[(X=i)\cap E]+\Pr[(X=i)\cap\neg E] \\
&\qquad -\Pr[(Y=i)\cap E]-\Pr[(Y=i)\cap\neg E]\Big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|E]\Pr[E]+\Pr[X=i|\neg E]\Pr[\neg E] \\
&\qquad -\Pr[Y=i|E]\Pr[E]-\Pr[Y=i|\neg E]\Pr[\neg E]\Big| \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|E]\Pr[E]-\Pr[Y=i|E]\Pr[E]\Big| \\
&\qquad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|\neg E]\Pr[\neg E]-\Pr[Y=i|\neg E]\Pr[\neg E]\Big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\Pr[X=i|\neg E]-\Pr[Y=i|\neg E]\Big|\Pr[\neg E] \\
&\le \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Pr[X=i|\neg E]+\sum_{i=1}^{n}\Pr[Y=i|\neg E]\right)\Pr[\neg E] \\
&\le \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\epsilon=\epsilon
\end{aligned}$$

2. שיפור החסם התחתון למשפט Ramsey

נסתכל על הגרף האקראי $G(n,\frac{1}{2})$. לכל קבוצה בת k צמתים מתוך גרף זה, הסיכוי שהיא תהיה קליק או קבוצה בלתי תלויה הוא $2^{1-\binom{k}{2}}$. לכן תוחלת מספר הקבוצות בנות k הצמתים שמהוות קליקים או קבוצות בלתי תלויות היא $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$; מכיוון שקיימים גרפים שבהם מספר הקבוצות הנ"ל הוא יותר מהתוחלת (למשל הגרף השלם בעל n צמתים), קיימים גם גרפים בהם מספר הקבוצות הנ"ל הוא פחות מ-$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$. ניקח גרף ספציפי G כזה, ולכל קבוצה בת k צמתים שהיא קליק או קבוצה ב"ת נסיר את אחד מצמתיה מ-G. קיבלנו גרף G' שיש בו יותר מ-$n-\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$ צמתים ובכל זאת הוא אינו מכיל קליק או קבוצה ב"ת בת k צמתים, כנדרש.

על מנת להסיק את החסם האסימפטוטי ל-$R(k,k)$, נבחר $n=e^{-1}k2^{k/2}$ ונשתמש בחסם $\binom{n}{k}=\binom{e^{-1}k2^{k/2}}{k}<(\frac{k2^{k/2}}{k})^k=2^{\binom{k}{2}+k/2}=o(2^{\binom{k}{2}}\cdot n)$. על מנת להראות שמתקיים $n-\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}=(1-o(1))n=(1-o(1))e^{-1}k2^{k/2}$.

3. פונקצית סף לקיום K_4 בגרפים מקריים

אם $p(n)\ll n^{-2/3}$, אז תוחלת מספר הקליקים בני ארבעה צמתים ב-$G(n,p(n))$ היא $\binom{n}{4}(p(n))^6=o(\binom{n}{4}n^{-6\cdot 2/3})=o(1)$, ומכך נובע שבהסתברות $1-o(1)$ אין אפילו קליק אחד כזה.

מצד שני, אם $p(n) \gg n^{-2/3}$, אז נסמן ב־X את מספר הקליקים בני ארבעה צמתים בגרף, ונראה שמתקיים $\mathrm{V}[X] = o((\mathrm{E}[X])^2)$; מכך ינבע לפי אי שוויון צ'בישף שבהסתברות $1-o(1)$ קיימים קליקים בגרף. $\mathrm{E}[X] = \binom{n}{4}(p(n))^6$ כמקודם, ועתה נחסום את $\mathrm{V}[X]$. לכל $1 \leq i < j < k < l \leq n$ נסמן ב־$X_{i,j,k,l}$ את משתנה האינדיקטור המקבל ערך 1 אם אלו מהווים קליק בגרף, וערך 0 אחרת. בפרט $X = \sum_{i<j<k<l} X_{i,j,k,l}$. נשים לב עתה שאם $|\{i,j,k,l\} \cap \{i',j',k',l'\}| \leq 1$ אז $\mathrm{Cov}[X_{i,j,k,l}, X_{i',j',k',l'}] = 0$ (כי המאורעות המתאימים הם ב"ת); יתרה מזו, אם $|\{i,j,k,l\} \cap \{i',j',k',l'\}| = 2$ אז אנו מקבלים ש־ $\mathrm{Cov}[X_{i,j,k,l}, X_{i',j',k',l'}] < \mathrm{E}[X_{i,j,k,l} \cdot X_{i',j',k',l'}] = (p(n))^{11}$, ואם $|\{i,j,k,l\} \cap \{i',j',k',l'\}| = 3$ אז $\mathrm{Cov}[X_{i,j,k,l}, X_{i',j',k',l'}] < (p(n))^9$; לבסוף נשים לב שאם $\{i,j,k,l\} = \{i',j',k',l'\}$ אז $\mathrm{Cov}[X_{i,j,k,l}, X_{i',j',k',l'}] = \mathrm{V}[X_{i,j,k,l}] < (p(n))^6$. מכאן מתקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[X] &< \binom{n}{4}(p(n))^6 + \binom{n}{3}(n-3)(n-4)(p(n))^9 + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}(p(n))^{11} \\ &= O(n^4(p(n))^6 + n^5(p(n))^9 + n^6(p(n))^{11})\end{aligned}$$

מצד שני $(\mathrm{E}[X])^2 = \theta(n^8(p(n))^{12})$, ולכן אם $p(n) \gg n^{-2/3}$, ז"א ש־$(p(n))^{-1} = o(n^{2/3})$, אז מתקבל כנדרש

$$\mathrm{V}[X]/(\mathrm{E}[X])^2 = O(n^{-4}(p(n))^{-6} + n^{-3}(p(n))^{-3} + n^{-2}(p(n))^{-1}) = o(1 + n^{-1} + n^{-4/3}) = o(1)$$

4. משולשים זרי קשתות בגרפים מקריים

משתמשים בשיטת הכרסום של Rödl. למעשה אפשר להשתמש ישירות במשפט הכללי שנלמד בהקשר זה בכיתה: עבור כל γ הגרף $G(n, \frac{1}{2})$ מקיים בהסתברות $1-o(1)$ את התכונות הבאות ־ מספר הקשתות בגרף m מקיים $(\frac{1}{4}-\gamma)n^2 \leq m \leq (\frac{1}{4}+\gamma)n^2$, ולכל זוג צמתים (שונים) u, v ב־G, מספר הצמתים שהם שכנים משותפים של u ו־v הוא בין $(\frac{1}{4}-\gamma)n$ ל־$(\frac{1}{4}+\gamma)n$.

נבנה עתה את ההיפרגרף הבא H לפי G ־ קבוצת הצמתים ב־H תהיה קבוצת הקשתות ב־G, ולכל משולש ב־G תהיה קשת ב־H (המורכבת משלושת קשתות המשולש, שהן כזכור צמתים ב־H). נשים לב עתה שלכל צומת ב־H יש דרגה בין $(\frac{1}{4}-\gamma)n$ ל־$(\frac{1}{4}+\gamma)n$ (ובפרט גם אין צמתים מבודדים או צמתים עם דרגה $\frac{1}{2}n$ או יותר), ולכל זוג צמתים ב־H יש לכל היותר קשת משותפת אחת. לכן עבור כל $\epsilon > 0$ אם נבחר $\gamma = \min\{\frac{1}{2}\epsilon, \gamma(3,2,\epsilon)\}$ אז נקבל (עבור n גדול דיו) לפחות $(1-2\epsilon)\frac{m}{3} \geq \frac{1}{3}(1-2\epsilon)(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\epsilon)n^2 > (\frac{1}{12}-\epsilon)n^2$ משולשים זרי קשתות ב־G, מתוך הקשתות הזרות בצמתי־H המובטחות ב־H.

5. מספר צביעה של גרף מושרה על קבוצת צמתים מקרית

א. לכל גרף $G = (V,E)$ ולכל קבוצת צמתים $V' \subset V$ מספרי הצביעה של הגרפים המושרים מקיימים $\chi(G) \leq \chi(G[V']) + \chi(G[V-V'])$: מצביעה (חוקית) של $G[V']$ ב־k־ צבעים וצביעה של $G[V-V']$ ב־l־ צבעים קל לקבל צביעה של G ב־$k+l$ צבעים (צובעים את איברי V' בקבוצת צבעים זרה לזו שצובעים בה את צמתי $V-V'$). כאשר V' נבחר יוניפורמית מתקיים $\mathrm{E}[\chi(G[V'])] = \mathrm{E}[\chi(G[V-V'])]$, ולכן $2\mathrm{E}[\chi(G[V'])] \geq 1000$ כנדרש.

ב. תהי $c: V \to \{1,\ldots,1000\}$ צביעה חוקית של G, ותהי $V_i = \{v \in V | c(v) = i\}$. נגדיר את מרטינגל החשיפה הבא: לכל $0 \leq i \leq 1000$, המ"מ X_i יציין את תוחלת מספר הצביעה של $G[V']$ כאשר כבר ידועים $V' \cap V_1, \ldots, V' \cap V_i$. בפרט X_0 הוא המ"מ הקבוע $\mathrm{E}[\chi(G[V'])] \geq 500$, ו־$X_{1000}$ הוא המ"מ $\chi(G[V'])$ עצמו. נשים לב שהפונקציה $\chi(G[V'])$ מקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס לחשיפות $V' \cap V_i$, כי כל V_i היא קבוצת צמתים ב"ת ולכן שינוי ב־$V' \cap V_i$ לא משנה את מספר הצביעה ביותר מאחד. מכאן שאפשר להשתמש באי שוויון Azuma כדי לסיים את הטיעון:

$$\Pr[\chi(G[V']) < 400] \leq \Pr[X_{1000} - X_0 < -\sqrt{10} \cdot \sqrt{1000}] < e^{-5} < \frac{1}{100}$$

פתרונות לתרגיל השלישי

1. קיום הצבה מספקת ל־6SAT

נגריל לכל משתנה X_i ערך ב־$\{0,1\}$ באופן יוניפורמי וב"ת, ונשתמש בגירסא הסימטרית של הלמה הלוקלית על מנת להראות שבהסתברות חיובית כל הפסוקיות יסתפקו. נסמן ב־m את מספר הפסוקיות הכולל, ול־$1 \leq j \leq m$ נגדיר את E_j להיות המאורע שהפסוקית ה־j אינה מסתפקת. לא קשה לראות כי $\Pr[E_j] = \frac{1}{64}$. בנוסף לכך, E_j הוא ב"ת באלגברה הנוצרת ע"י כל המאורעות המתאימים לפסוקיות אשר אין להם משתנה משותף עם הפסוקית ה־j. מספר הפסוקיות עם משתנה משותף עם הפסוקית ה־j חסום ע"י 18 (לפי הנתונים כל אחד מ־6 המשתנים יכול להופיע ב־3 פסוקיות נוספות על הפסוקית ה־j). נותר רק לוודא שמתקיים $e \cdot \frac{1}{64} \cdot (18+1) \leq 1$, ומכאן שמתקיים $\Pr[\bigcap_{j=1}^m \overline{E}_j] > 0$, ז"א שבהסתברות חיובית כל הפסוקיות יסתפקו.

2. חיתוך של מאורעות

א. מראים זאת באינדוקציה על k. עבור $k = 1$ המשפט טריביאלי. כמו כן נשים לב שאם $A_1, \ldots, A_k$ הן תכונות מונוטוניות לא יורדות, אז גם $\bigwedge_{i=1}^k A_i$ היא תכונה כזו. לכן מתקיים (ע"י שימוש כפי שנעשה בכיתה במשפט FKG ולאחריו שימוש בהנחת האינדוקציה)

$$\begin{aligned}
\Pr[G \models \bigwedge_{i=1}^{k+1} A_i] &= \Pr[G \models (\bigwedge_{i=1}^{k} A_i) \wedge A_{k+1}] \\
&\geq \Pr[G \models \bigwedge_{i=1}^{k} A_i] \cdot \Pr[G \models A_{k+1}] \\
&\geq (\prod_{i=1}^{k} [G \models A_i]) \cdot \Pr[G \models A_{k+1}] = \prod_{i=1}^{k+1} [G \models A_i]
\end{aligned}$$

כנדרש.

ב. (i) לא קשה להפריך זאת: עבור $G(n, \frac{1}{2})$ מתקבל בהסתברות $2^{-\binom{n}{2}}$ הגרף הריק (שבפרט אינו מכיל משולש), ולכן ההסתברות שהגרף מכיל משולש היא לכל היותר $1 - 2^{-O(n^2)}$, הקטנה מ־$1 - 2^{-\Omega(n^3)}$ שבשאלה.

ב. (ii) מוכיחים זאת ע"י שימוש בסעיף א. כאן עבור $1 \leq i \leq n$ מגדירים את E_i להיות המאורע שדרגת הצומת i בגרף היא לפחות $\frac{n}{2}$ (אנו משתמשים בסימון $V = \{1, \ldots, n\}$ עבור צמתי הגרף $G(n, \frac{1}{2})$). לכל i מתקיים $\Pr[E_i] = \frac{1}{2}$, וכל המאורעות הנ"ל מתייחסים לקיום תכונות מונוטוניות לא יורדות של הגרף, כך שמתקיימים התנאים הדרושים לשימוש בסעיף א.

3. פונקציות מונוטוניות

נסמן ב־$\mathcal{F}_0 = \{x \in \{0,1\}^n | f(x) = 0\}$ את קבוצת האיברים שעליהם f מקבלת את הערך 0, וב־$\mathcal{F}_1 = \{0,1\}^n - \mathcal{F}$ את האיברים עליהם f היא 1. אם מזהים כל איבר $x \in \{0,1\}^n$ עם קבוצת האחדות שלו $S_x = \{i | x_i = 1\} \subseteq [n]$, אז קל לוודא ש־$\mathcal{F}_0$ היא משפחה מונוטונית לא עולה של ת"ק של $[n]$, וש־$\mathcal{F}_1$ היא משפחה מונוטונית לא יורדת. נניח עתה ש־$g : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ היא פונקציה מונוטונית לא עולה, ונסמן בדומה את המשפחות $\mathcal{G}_0$ (שהיא מונוטונית לא יורדת) ו־$\mathcal{G}_1$ (שהיא מונוטונית לא עולה).

המרחק מ־f מהפונקציה הקבועה הקרובה ביותר הוא $\min\{|\mathcal{F}_0|, |\mathcal{F}_1|\}$, כי $|\mathcal{F}_0|$ הוא המרחק של f מהפונקציה המקבלת את הערך הקבוע 1, ו־$|\mathcal{F}_1|$ הוא המרחק מפונקצית ה־0. כמו כן, המרחק מ־f ל־g הוא $|\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_0| + |\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{G}_1|$. לכן על מנת להוכיח את טענת השאלה, עלינו להוכיח שלכל g מונוטונית לא עולה מתקיים $|\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_0| + |\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{G}_1| \geq \min\{|\mathcal{F}_0|, |\mathcal{F}_1|\}$.

לפי המשפט של קלייטמן מתקיים $|\mathcal{F}_0|\cdot|\mathcal{G}_1| \geq |\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_1|2^n$ ו־$|\mathcal{F}_1|\cdot|\mathcal{G}_0| \geq |\mathcal{F}_1\cap\mathcal{G}_0|2^n$, ולכן:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_0\cap\mathcal{G}_1|+|\mathcal{F}_1\cap\mathcal{G}_0| &\geq 2^{-n}(|\mathcal{F}_0|\cdot|\mathcal{G}_1|+|\mathcal{F}_1|\cdot|\mathcal{G}_0|)\\
&= 2^{-n}\left(|\mathcal{F}_0|\cdot|\mathcal{G}_1|+|\mathcal{F}_1|\cdot|(2^n-|\mathcal{G}_1|)\right)\\
&= (2^{-n}|\mathcal{G}_1|)\cdot|\mathcal{F}_0|+(1-2^{-n}|\mathcal{G}_1|)\cdot|\mathcal{F}_1|\\
&\geq (2^{-n}|\mathcal{G}_1|)\min\{|\mathcal{F}_0|,|\mathcal{F}_1|\}+(1-2^{-n}|\mathcal{G}_1|)\min\{|\mathcal{F}_0|,|\mathcal{F}_1|\}\\
&= \min\{|\mathcal{F}_0|,|\mathcal{F}_1|\}
\end{aligned}$$

כאשר משתמשים לקראת הסוף בכך שתמיד מתקיים $0 \leq 2^{-n}|\mathcal{G}_1| \leq 1$.

4. שיטה להוכחת התכנסות של הילוך מקרי

א. מסתכלים על ההתפלגות המותנה

$$\Pr[Y_t=i_t|Y_0=i_0,\ldots,Y_{t-1}=i_{t-1},X_0=j_0,\ldots,X_{t-1}=j_{t-1}]$$

מההגדרות שבשאלה לא קשה לראות שערך הנ"ל הוא $\frac{1}{2}$ עבור $i_t=i_{t-1}-1$ ו־$\frac{1}{2}$ עבור $i_t=i_{t-1}+1$ (זה נכון ללא תלות בשאר הערכים גם אם $i_{t-1}=j_{t-1}$ וגם אם $i_{t-1}\neq j_{t-1}$). מכאן נובע שערכי ההסתברויות המותנות $\Pr[Y_t=i_t|Y_0=i_0,\ldots,Y_{t-1}=i_{t-1}]$ הם $\frac{1}{2}$ עבור $i_t=i_{t-1}-1$ (ללא תלות בערכים האחרים) ו־$\frac{1}{2}$ עבור $i_t=i_{t-1}+1$, ז"א שזהו הילוך מקרי על המעגל (הערה: החשיבות כאן היא לעובדה שמטריצת המעבר עבור Y_t אינה תלויה בשאלה האם X_{t-1} ו־Y_{t-1} כבר נפגשו).

ב. נגדיר את $Z_t=\frac{1}{2}(X_t-Y_t)$, כאשר כל הפעולות כולל החלוקה ב־2 נעשות מודולו n (חשוב לציין שכאן משתמשים בעובדה ש־n אינו זוגי). ניתן עתה לראות ש־$Z_0,Z_1,\ldots$ מתנהגים כמו הילוך מקרי על המעגל בעל n צמתים עד הפעם הראשונה שמתקבל הערך 0, שזוהי נקודת המפגש בין X_t ו־Y_t. לכן תוחלת זמן המפגש חסומה ע"י מקסימום תוחלת זמן ההגעה מנקודה כל שהיא על המעגל לנקודת ה־0, שהיא $O(n^2)$ (למשל ע"י חישובו של זמן הטיול בין כל שתי נקודות על המעגל). לכן, אם נסמן ב־E_t את המאורע ששני ההילוכים המקריים נפגשו עד זמן t, מתקיים $\lim_{t\to\infty}\Pr[E_t]=1$ (אפשר להוכיח זאת ע"י אי שוויון מרקוב, אולם לא קשה להראות גם $\Pr[E_t]=1-e^{-\Omega(t/n^2)}$).

לבסוף, משתמשים בתוצאת השאלה הראשונה מהתרגיל השני, כי $\Pr[X_t=Y_t|E_t]=1$, ולכן

$$0\leq\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr[X_t=i]-\Pr[Y_t=i]|\right)\leq\lim_{t\to\infty}(1-\Pr[E_t])=0$$

ובתוספת העובדה שההתפלגות (הלא־מותנה) של Y_t היא ההתפלגות הסטציונרית עבור ההילוך המקרי על המעגל (שהרי לפי נתוני השאלה ההתפלגות של Y_0 היתה ההתפלגות הסטציונרית הנ"ל) מקבלים את המבוקש.