תרגיל ראשון (הגשה: 21.2.2008)

סימולציה של פרמוטציה

מנסים להגריל פרמוטציה מקרית של $\{1,\dots n\}$ באופן הבא: ראשית שומרים במשתנים $x_1,\dots,x_n$ את הערכים $x_i = i$ לכל $1 \le i \le n$. אחר כך מבצעים n שלבים, כאשר בשלב ה־i בוחרים באופן יוניפורמי $1 \le j \le n$, ומחליפים את הערכים $x_i = x_j$ (אם נבחר $j = i$ אז לא עושים כלום). האם בסוף התהליך אכן תוגרל באופן יוניפורמי מכל האפשרויות פרמוטציה של $\{1,\dots,n\}$? נמקו.

סכום מקרי

נניח ש־$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ היא סידרה של מספרים שכל מה שידוע עליהם הוא שלא כולם שווים ל־0. נגריל עתה מספר r באופן הבא: נבחר באופן מקרי ויוניפורמי (מכל הקבוצות האפשריות) תת קבוצה $I \subseteq \{1,\dots,n\}$, ואז נקבע את $r = \sum_{i\in I}\alpha_i$. הראו שבסיכוי $\frac{1}{2}$ לפחות r אינו שווה ל־0.

ניחושים מול שקרן

קיים מספר טבעי לא ידוע k שאותו צריך לנחש (אין מראש הגבלה על גודלו). השאלה היחידה שמותר לשאול היא מהסוג "האם המספר שווה ל־a?" כאשר a מספר טבעי כל שהוא. אם $a \ne k$ אז התשובה תמיד תהיה "לא", אבל אם $a = k$ אז רק בסיכוי $\frac{2}{3}$ התשובה תהיה "כן", ובסיכוי $\frac{1}{3}$ התשובה בכל זאת תהיה "לא". כתבו אלגוריתם אשר יצליח למצוא את המספר הנכון (ז"א לקבל תשובה של "כן") לאחר ביצוע מספר ניחושים שתוחלתו היא $O(k)$ לכל k, והוכיחו זאת.

תרגיל שני (הגשה: 20.3.2008)

צביעה צבעונית

צביעה של הקשתות של גרף $G=(V,E)$ (שבה כל קשת מ־E מקבלת צבע מ־$\{1,\ldots,c\}$) תיקרא צבעונית (באנגלית: rainbow coloring), אם לכל זוג צמתים u,v יש מסלול מ־u ל־v שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים (בפרט זה אומר שהגרף קשיר וקוטר הגרף אינו עולה על מספר הצבעים בצביעה). הראו שלכל גרף עם n צמתים, עבור n גדול דיו, ודרגה מינימלית לפחות $\frac{n}{2}$, יש צביעה צבעונית עם לא יותר מ־3 צבעים.

פסוקיות לא מאוד מסופקות

הראו שלכל ϵ קיים קבוע C, כך שלכל נוסחת 3-NAE-SAT עם n משתנים ו־$m>Cn$ פסוקיות קיימת הצבה המספקת לפחות $(\frac{3}{4}-\epsilon)m$ ולא יותר מ־$(\frac{3}{4}+\epsilon)m$ מהפסוקיות. פסוקית של 3-NAE-SAT מסתפקת אם לא כל שלושת הליטרלים מקבלים אותו ערך (ז"א אם לא כולם אפס ולא כולם אחד), וההנחה היא שכל פסוקית תלויה בדיוק בשלושה משתנים שונים.

גרפים ללא חיתוך

הראו שלכל C קיים גרף $G=(V,E)$ עם n צמתים, כאשר n מספר זוגי (וגדול דיו כדי שההוכחה תעבוד), ועם התכונות הבאות: המותן של G היא לפחות C, ולכל חלוקה של V לשתי קבוצות V_1,V_2 בגודל $\frac{n}{2}$ כל אחת יהיו בין שתי הקבוצות לפחות Cn קשתות.

הערה: יש מקרים שבהם הדרך הנכונה לחסום סכום של מ"מ ב"ת לא תמיד עוברת דרך החסמים הכלליים עבור סכומים כאלה...

תרגיל שלישי (הגשה: 18.5.2008)

הילוך מקרי על הקוביה

על הקוביה הבוליאנית $\{0,1\}^n$ נגדיר הילוך מקרי מהראשית: $\underline{x}^{(0)}$ יהיה הווקטור שכולו אפסים, ובהינתן $\underline{x}^{(i)}$, נגדיר את $\underline{x}^{(i+1)}$ ע"י זה שנבחר באופן יוניפורמי (וב"ת בבחירות קודמות) $1 \le j_i \le n$, ואז נהפוך את ערכו של האיבר ה־j_i ב־$\underline{x}^{(i)}$. נסמן ב־d_i את המרחק מהראשית של $\underline{x}^{(i)}$, ז"א את מספר האחדות שבו. הראו שמתקיים:

$$\Pr\Big[d_n < \frac{1}{2}\mathrm{E}[d_n]\Big] \le 2^{-\Omega(n)}$$

הערה: אפשר לפתור זאת מבלי לחשב במדויק את $\mathrm{E}[d_n]$, אבל כמובן שצריך לדאוג לאיזה שהוא חסם על גודל התוחלת הנ"ל.

פונקציות מונוטוניות מקריות

עבור ווקטורים בקוביה הבוליאנית $\underline{x},\underline{y} \in \{0,1\}^n$ נרשום $x \le y$ אם לכל i מתקיים $x_i \le y_i$. פונקציה $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ תיקרא מונוטונית אם לכל $\underline{x} \le \underline{y}$ מתקיים $f(\underline{x}) \le f(\underline{y})$. נניח עתה ש־$f$ היא פונקציה מונוטונית המוגרלת באופן יוניפורמי מקבוצת כל הפונקציות המונוטוניות (שימו לב שבמרחב הסתברות זה אין אי תלות של ערכי $f(\underline{x})$ זה בזה). הוכיחו עתה שלכל $\underline{y},\underline{z} \in \{0,1\}^n$ מתקיים:

$$\Pr[f(\underline{y}) = 1 \wedge f(\underline{z}) = 1] \ge \Pr[f(\underline{y}) = 1] \cdot \Pr[f(\underline{z}) = 1]$$

שתי שאלות על הילוכים מקריים מהוססים

גמרו לקרוא את החומר על הילוכים מקריים.

עתה, נניח שאנו מבצעים (במקום הילוך מקרי רגיל) את הפרוצדורה הבאה: בכל שלב, בסיכוי חצי נבצע את ההילוך המקרי לפי בחירה של שכן מקרי של הצומת הנוכחי, ובסיכוי חצי פשוט נישאר צעד אחד נוסף בצומת הנוכחי. נניח גם שהגרף עליו מתבצע ההילוך הוא קשיר. הוכיחו עבור הילוך כזה שני דברים.

- הילוך כזה תמיד יתכנס להתפלגות הסטציונרית (אותה אחת כמו עבור הילוך מקרי רגיל), גם אם הגרף הוא 2־צביע.
- זמני הביקור (הממוצעים) בהילוך כזה הם בדיוק כפולים מאלו של הילוך מקרי רגיל.

הערה: כל סעיף כאן ינוקד כאילו הוא שאלה נפרדת.