תרגיל ראשון (הגשה: 6.12.2006)

משחקים במספרים

חישבו על המשחק הבא: שחקן א' בוחר שני מספרים טבעיים. שחקן ב' רואה את אחד המספרים שנבחר באופן מקרי ויוניפורמי משני אלו ואמור להגיד האם זהו המספר הגדול מבין השניים.

- הראו שהאסטרטגיה הבאה של השחקן השני תמיד תתן סיכוי זכיה גדול ממש מ־$\frac{1}{2}$ לכל בחירה אפשרית של השחקן הראשון: "אם המספר הנראה הוא k, אז אומרים שהוא המספר הגדול יותר בסיכוי $1 - \frac{1}{k}$".
- מצד שני, הראו שלכל $\epsilon > 0$ ולכל אסטרטגיה אפשרית של השחקן השני, יש בחירה של השחקן הראשון כך שסיכוי הזכיה של השחקן השני אינו עולה על $\frac{1}{2} + \epsilon$.

פרדוקס יום ההולדת

נניח שאנו מגרילים סידרה של l מספרים $X_1, \ldots, X_l$ מתוך התחום $\{1, \ldots, k\}$ כאשר כל X_i נבחר באופן יוניפורמי ובלתי תלוי בכל הערכים האחרים. הראו כי אם $l = o(\sqrt{k})$ אז בסיכוי $o(1)$ בלבד יש שני מספרים זהים בסידרה $X_1, \ldots, X_l$ (הסבר לסימון ־ לכל $\epsilon > 0$ קיים $\alpha > 0$ כל שאם $l/\sqrt{k} < \alpha$ אז הסיכוי למאורע הנ"ל קטן מ־ϵ). מצד שני הראו שאם $l = \omega(\sqrt{k})$ אז הסיכוי לקיום שני מספרים זהים (או יותר) הוא $1 - o(1)$.

גרפים רחוקים

המרחק בין שני גרפים G ו־H יוגדר כמספר הקשתות המינימלי שיש להוריד ו/או להוסיף ל־H כך שיהפוך להיות גרף איזומורפי ל־G. הראו שאם ל־G יש n צמתים ו־$m \neq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ קשתות אז הגרף הרחוק ביותר מ־G הוא או הגרף המלא או הגרף הריק. רמז: אפשר להראות לכל H שהמרחק שלו מ־G חסום ע"י $pm + (1-p)(\binom{n}{2} - m)$ עבור $0 \leq p \leq 1$ מתאים.

תרגיל שני (הגשה: 3.1.2007)

למת הבידוד עם זוגיות

הוכיחו את הטענה הבאה: אם $\mathcal{F}$ היא משפחה של תתי קבוצות של $A = \{1, \ldots, m\}$, ואנו בוחרים פונקצית משקל $w : A \to \{1, \ldots, n\}$ באופן יוניפורמי וב"ת, אז בסיכוי $\frac{1}{2} - O(\frac{m}{n})$ תהיה קבוצה יחידה $F \in \mathcal{F}$ עם משקל מינימלי, אשר בנוסף לכך יהיה אי־זוגי.

תתי גרפים של גרפים צפופים

נתון גרף G כל שהוא אשר מספר הקשתות שלו הוא αn^2 עבור $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ מתאים. נגריל תת גרף מושרה מקרי H, ע"י כך שכל צומת של G תיבחר להיות צומת של H בהסתברות $\frac{1}{2}$, באופן ב"ת בצמתים האחרים. הראו שבסיכוי $1 - o(1)$ מספר הקשתות ב־H הוא $\frac{1}{4}\alpha n^2 + o(n^2)$.

חיפוש בינארי עם מעט שקרים

נזכיר את האלגוריתם (הדטרמיניסטי) לחיפוש איבר נתון ברשימה ממוינת בת n איברים באמצעות $\lceil \log_2 n \rceil$ השוואות: מתחילים מהתחום $\{1, \ldots, n\}$. בכל שלב משווים את האיבר הנתון עם האיבר האמצעי בתת הרשימה המתאימה לתחום, ובהתאם עוברים לתת־תחום שגודלו כחצי מגודל התחום בסוף השלב הקודם.

עתה נניח שאנו רוצים לחפש איבר נתון ברשימה ממוינת, אולם כל פעם שאנו משווים את האיבר הנתון עם איבר ברשימה, בסיכוי של 1% נקבל את התשובה ההפוכה לאמת. ליתר דיוק: אין לנו יכולת לקרוא את האיברים מהרשימה אלא רק להשוות אותם. אם תוצאת ההשוואה היא "$>$" אז בסיכוי 1% נקבל את התשובה "$<$", ואם תוצאת ההשוואה היא "$<$" אז בסיכוי 1% נקבל את התשובה "$>$". לא יהיו תשובות שגויות אף פעם ביחס ל־"$=$".

כתבו אלגוריתם שמוצא את האיבר ברשימה הממוינת, אשר רץ בתוחלת זמן שהיא עדיין $O(\log n)$. מותר להניח שהאיבר הנתון אכן קיים ברשימה, ויש להקפיד שניתוח זמן הריצה אכן יהיה נכון ביחס לתוחלת (לא רק "בהסתברות גבוהה הזמן הוא קצר"). עבור תשובות עם תוחלות זמן מעט גדולות מ־$O(\log n)$ ינתן ניקוד חלקי.

תרגיל שלישי (הגשה: 7.2.2007)

קיום תת גרף ספציפי בגרף צפוף

הראו קיום קבוע גלובלי c עם המאפיין הבא: אם H הוא גרף בעל m צמתים ודרגא מקסימלית לכל היותר d, ו־G הוא גרף בעל $n > 2^{cm}$ צמתים ולפחות $(\frac{1}{2} - \frac{1}{cd})n^2$ קשתות, אז G מכיל עותק של H כתת גרף (לא בהכרח מושרה).

הערה: יש משפט ידוע של Erdös ו־Stone על קיום תת גרף כזה עם תנאי אופטימלי על מספר הקשתות של G, אבל עם חסם רע בהרבה על n המינימלי, אשר משתמש בלמת הרגולריות על גרפים (שאותה לא נלמד בקורס זה). זה לא מה שאנחנו מחפשים כאן...

תתי גראפים בגראפים צפופים – הדור הבא

נתון גרף G כל שהוא אשר מספר הקשתות שלו הוא לפחות $\frac{1}{4}n^2$. נגריל תת גרף מושרה מקרי H, ע"י כך שנבחר באופן מקרי ויוניפורמי, בלי חזרות, קבוצה בת $\frac{1}{2}n$ צמתים בדיוק של G. הראו שבסיכוי לכל היותר $2^{-\Theta(n)}$ קיבלנו ב־H מספר קשתות הקטן מ־$\frac{1}{20}n^2$.

קבוצות קשירות על הקוביה

גרף הקוביה ה־n מימדית הוא הגרף הבא: קבוצת הצמתים היא קבוצת הווקטורים הבוליאנים $V = \{0,1\}^n$. קבוצת הקשתות היא קבוצת הזוגות $\underline{u}, \underline{v}$ אשר נבדלים ביניהם על קורדינטה אחת בדיוק (ז"א שקיים $1 \leq i \leq n$ יחידי כך ש־$u_i \neq v_i$). נתונה תת קבוצה כל שהיא U של V. הראו שע"י שינוי (תוספת ו/או הורדה) של $o(V) = o(2^n)$ צמתים ניתן להגיע לקבוצה U' כך שתת הגרף של הקוביה שהיא משרה הוא קשיר.

רמז לכיוון פיתרון אפשרי: קבוצת כל הווקטורים עם משקל Hamming (מספר ערכי "אחד") קטן מ־$\frac{1}{3}n$ היא בפרט קבוצה מגודל $o(V)$. אפשר כצעד התחלתי להוסיף אותה ל־U ואז "להתחבר" אליה.

תרגיל רביעי (הגשה: 18.3.2007)

קריאה מודרכת - שיטת הצימוד

קיראו בחוברת הקורס על הוכחת התכנסות בשיטת הצימוד. לאחר מכן, הוכיחו (בשיטה זו או אחרת) את הטענה הבאה: עבור הילוך מקרי על גרף (לא מכוון) המכיל מעגל מגודל אי־זוגי, ההתפלגויות (הלא־מותנות) של הצומת שהגיעו אליו בזמן t אכן יתכנסו (עבור $t \to \infty$) להתפלגות הסטציונרית.

קריאה מודרכת - דה־רנדומיזציה

קיראו בחוברת הקורס על דה־רנדומיזציה (שתי השיטות). לאחר מכן, הראו איך בשיטת התוחלות המותנות אפשר להשיג גם את התוצאה שהושגה בפרק על מרחבי מדגם מוגבלים: קיום אלגוריתם דטרמיניסטי שרץ בזמן פולינומי, ומוצא עבור גרף בעל m קשתות חתך הכולל לפחות $\frac{1}{2}m$ קשתות.