

תרגיל ראשון

(הגשה: 28.11.2005)

הילוך על המעגל

נתון האלגוריתם הבא: האלגוריתם שומר מונה, שערכו ההתחלתי הוא 0. בכל שלב מטילים מטבע (הוגנת), ובהתאם לתוצאה מגדילים או מקטינים את המונה ב-1. האלגוריתם עוצר כאשר ערך המונה מתחלק שוב ב- n . הוכיחו שלכל n קבוע מראש, תוחלת זמן הריצה של האלגוריתם היא סופית.

כוכבים בגראפים מקריים

אנו מסתכלים על הגרף המקרי בעל n הצמתים $G(n, \frac{1}{2})$, שבו כל זוג צמתים נבחר להיות קשת בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן בלתי תלוי בזוגות האחרים. הוכיחו כי בהסתברות $1 - o(1)$ גרף זה מקיים את התכונה הבאה: לכל צומת v בגרף קיימים שלושה שכנים שלו u_1, u_2, u_3 אשר אין ביניהם קשתות (ז"א שהגרף המושרה על $\{v, u_1, u_2, u_3\}$ הוא "כוכב עם שלוש פינות שמרכזו v ").

גובה עץ מקרי

נבנה עץ מקרי בעל קבוצת הצמתים $\{v_1, \dots, v_n\}$ ב- n שלבים באופן הבא: בשלב הראשון ניקח את ה"עץ" בעל הצומת היחיד v_1 , ואח"כ בכל שלב i נבחר צומת באופן מקרי ויוניפורמי מ- $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, ונחבר אליו את v_i כעלה חדש. לדוגמה, לא קשה לראות כי הסיכוי שהעץ שיצא בסוף הוא המסלול בעל n הצמתים יהיה $1/(n-1)!$. הוכיחו כי תוחלת גובה העץ היא לפחות $\Omega(\log n)$.

תרגיל שני

(הגשה: 2.1.2006)

הפרדה ע"י פונקציה לינארית

תהי $A \subseteq \{0, 1\}^n$ קבוצה כל שהיא בת k איברים בקוביה הבוליאנית ה- n מימדית. הראו שקיימת פונקציה לינארית $f: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ כך שמתקיים עבור מספר האיברים ב- A המאפסים את f אי השוויון $|\{v \in A | f(v) = 0\}| = \frac{1}{2}k \pm O(\sqrt{k})$.

מיון ע"י QuickSort

ניזכר באלגוריתם QuickSort למיון קבוצה A בת n מספרים (לצורך השאלה נניח שאין ב- A שני איברים זהים): בוחרים באופן מקרי ויוניפורמי איבר $a \in A$. עתה מגדירים את הקבוצות $A_0 = \{b \in A | b < a\}$ ו- $A_1 = \{b \in A | b > a\}$. ממיינים באופן רקורסיבי את A_0 ואת A_1 , ופולטים (בסדר זה) את A_0 , a ו- A_1 . הוכיחו כי בסיכוי $1 - o(1)$ מספר ההשוואות הכולל באלגוריתם אינו עולה על $100n \log n$ (הלוגריתם בבסיס 2). רמז: נסו לבדוק מה קורא עם כל $b \in A$ לחוד.

קבוצות ב"ת בהיפרגרפים

עבור היפרגרף 3-יוניפורמי (ז"א מבנה עם קבוצת צמתים V וקבוצת "קשתות" E שבו כל קשת היא בת שלושה צמתים בדיוק) בעל n צמתים ו- m קשתות, כאשר $m \geq \frac{1}{3}n$, הראו כי קיימת קבוצת צמתים בלתי תלויה (ז"א קבוצה $V' \subseteq V$ שאינה מכילה אף קשת מ- E) שגודלה לפחות $\frac{2n^{3/2}}{3\sqrt{3m}}$.

תרגיל שלישי

(הגשה: 30.1.2006)

הצבה מספקת מינימלית

נסתכל על הבעיה הבאה: עבור 3CNF נתון, מצא הצבה מספקת (אם יש כזו) שבה מספר המשתנים שערכם 1 הוא מינימלי. כמובן שבעיה זו היא NP-קשה. מה שאתם מתבקשים לעשות הוא רדוקציה הסתברותית למקרה שבו ההצבה המינימלית הנ"ל היא יחידה (אם היא קיימת).

מרטינגל חשיפה עבור עץ מקרי

נבנה שוב עץ מקרי בעל קבוצת הצמתים $\{v_1, \dots, v_n\}$ ב- n שלבים באופן הבא: מתחילים מה"עץ" בעל הצומת היחיד v_1 , ואח"כ בכל שלב i בוחרים צומת באופן מקרי ויוניפורמי מ- $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, ומחברים אליו את v_i . הגדירו מרטינגל חשיפה של גובה העץ עבור n שלבי בניית העץ, והראו שהמרטינגל מקיים את תנאי ליפשיץ (עצה ידידותית - לא למהר יותר מדי בהוכחה).

קבוצת צמתים מאולצת

הוכיחו את קיומו של קבוע גלובלי c המקיים את הדבר הבא: אם G הוא גרף עם דרגא מקסימלית d , ו- V_1, \dots, V_m הן קבוצות זרות בנות cd צמתים של G כל אחת, אז קיימת קבוצה U המכילה צומת אחד מכל V_i ושאינה מכילה אף קשת של G .

תרגיל רביעי

(הגשה: 12.3.2006)

משפחות נחתכות

משפחה \mathcal{F} של תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ תיקרא נחתכת אם לכל $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ מתקיים $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. הראו שאם $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ כולן נחתכות, אז יש לפחות 2^{n-k} תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ שלא שייכות לאף אחת מהן. רמז: נסו להסתכל על המקרה שהמשפחות הן "ל" הן מונוטוניות לא יורדות.

הילוך על הקוביה

נגדיר הילוך מקרי על הקוביה הבוליאנית $\{0, 1\}^n$ באופן הבא: X_0 הוא הווקטור $(0, \dots, 0)$ בהסתברות 1. בהינתן X_i , אנו נבחר בהסתברות $\frac{1}{2}$ את X_{i+1} להיות זהה לו, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נגדיר את X_{i+1} ע"י כך שנבחר באופן ימקרי ויוניפורמי קורדינטה של X_i ונהפוך את ערכה, כששאר הקורדינטות ישארו אותו דבר. הוכיחו שעבור $\epsilon > 0$ קבוע המרחק בין ההתפלגות של X_t לבין ההתפלגות היוניפורמית על $\{0, 1\}^n$ קטן מ- ϵ , עבור $t = O(n \log n)$.

קבוצות צבעוניות

נתונות m תתי קבוצות A_1, \dots, A_m של הקבוצה $\{1, \dots, n\}$, ונתון שמתקיים עבורן $\sum_{i=1}^m (2/3)^{|A_i|} < 1/6$. הראו שקיימת צביעה $c: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ שעבורה כל הקבוצות הן "ל" מכילות איברים מכל שלושת הצבעים, והסבירו איך ניתן למצוא צביעה כזו בזמן פולינומי ב- n ו- m .