

התרגיל האפס

(לא להגשה)

1. קרבה בין התפלגויות

עבור שתי מידות הסתברות P, Q מעל $[n] = \{1, \dots, n\}$ נגדיר את המרחק ביניהם לפי $|P - Q| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)|$. בספרות מרחק זה קרוי ה-Variation Distance.

א. הראו שלכל מאורע E מתקיים $|\Pr_P(E) - \Pr_Q(E)| \leq |P - Q|$.

ב. הראו שקיים E עבורו מתקיים $|\Pr_P(E) - \Pr_Q(E)| = |P - Q|$.

2. התפלגויות מותנות

נניח ש- X ו- Y הם שני משתנים מקריים (לא ב"ת) מעל אותו מרחב הסתברות, אשר מקבלים ערכים ב- $\{1, \dots, n\}$. נניח שקיים מאורע E כך ש- $\Pr[E] \geq 1 - \epsilon$, ושם E מתקיים אז $X = Y$ (ז"א $\Pr[X = Y | E] = 1$). הראו שהמרחק בין ההתפלגות על ערכי X לבין ההתפלגות על ערכי Y הוא לא יותר מ- ϵ , ז"א $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\Pr[X = i] - \Pr[Y = i]| \leq \epsilon$.

3. התפלגויות מותנות - הכיוון השני

נניח ש- p_1, \dots, p_n ו- q_1, \dots, q_n הם ווקטורי התפלגות (סדרות של מספרים אי-שליליים שסכומן 1) שעבורם מתקיים $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| = \epsilon$. הראו שקיים מרחב הסתברות, ושני מ"מ X ו- Y , כך שלכל i מתקיים $\Pr[X = i] = p_i$ ו- $\Pr[Y = i] = q_i$, וכן המאורע $X = Y$ מתקיים בהסתברות $1 - \epsilon$ בדיוק.

תרגיל ראשון

הגשה: 22.11.2004, 13:00

תרגיל בהסתברות

יהי μ מרחב הסתברות על קבוצת המחרוזות הבינאריות מאורך k , המוגדר כך שלכל i הביט i -ה נבחר להיות 1 בהסתברות α_i באופן בלתי תלוי בבחירת הביטים האחרים. יהי ν מרחב הסתברות על אותה קבוצה, המוגדר באופן זהה, פרט לכך שלכל i הביט i -ה נבחר להיות 1 בהסתברות β_i (באופן בלתי תלוי באחרים). הראו שהמרחק (variation distance) בין μ ו- ν הוא לכל היותר $\sum_{i=1}^k |\alpha_i - \beta_i|$.

סימולציה של התפלגות

אנו רוצים לבחור באופן מקרי יוניפורמי לחלוטין איבר מתוך $\{1, 2, 3\}$, אולם מקור ההסתברות היחידי שברשותינו הוא מטבע הוגנת, שאפשר להטילה מספר פעמים לקבלת משתנים מקריים ב"ת הנבחרים יוניפורמית מתוך $\{0, 1\}$.

א. הראו שלא קיים k עבורו יש אלגוריתם לבחירה יוניפורמית מתוך $\{1, 2, 3\}$ אשר בהסתברות 1 מבצע k או פחות הטלות של המטבע.

ב. הראו שקיים אבל אלגוריתם כנדרש שעבורו תוחלת מספר ההטלות היא סופית.

אוטומורפיזמים בגרף מקרי

הראו שלגרף המקרי $G(n, \frac{1}{2})$ אין אוטומורפיזם לא טריביאלי בהסתברות $1 - o(1)$. ז"א, שבהסתברות $1 - o(1)$, לכל פרמוטציה של הצמתים של G שאינה פונקצית הזהות תהיה קשת שתעבור לזוג צמתים שאינו קשת (או זוג שאינו קשת שיעבור לקשת).

מציאת קשתות בהיפרגרף

נזכיר שהיפרגרף 3-יוניפורמי הוא מבנה בעל קבוצת צמתים V וקבוצת "קשתות" E שהיא קבוצה של שלשות לא סדורות של צמתים מ- V . נתון ש- H הוא היפרגרף 3-יוניפורמי עם n צמתים המכיל לפחות n^2 קשתות, אולם אף זוג צמתים שלו אינו משתתף ביותר מ- $\frac{1}{10}\sqrt{n}$ קשתות. הראו שאם בוחרים קבוצת צמתים של H ע"י כך שכל צומת יבחר בהסתברות $10/\sqrt{n}$ באופן ב"ת בצמתים האחרים, אז בהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ קבוצה זו תכיל קשת מ- H .

קבוצה דומיננטית בגרף

הראו שלכל גרף G בעל n צמתים ודרגה מינימלית d , קיימת קבוצה U בת $\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}n$ צמתים, כך שכל צומת שאינו ב- U הוא שכן של צומת מ- U .

בידוד של שני מבנים

נניח ש- A קבוצה בת m איברים, ו- \mathcal{F} היא משפחה של תתי קבוצות של A . הראו שאם מגרילים באופן מקרי ויוניפורמי (וב"ת) פונקציית משקל $w: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$, אז בסיכוי $1 - \frac{3m}{n}$ לפחות גם האיבר ב- \mathcal{F} בעל המשקל המינימלי וגם האיבר ב- \mathcal{F} בעל המשקל השני הכי קטן הם יחידים.

מחלקות סיבוכיות

המחלקה BPP מוגדרת כמחלקת השפות שעבורם קיים אלגוריתם הסתברותי אשר רץ בזמן פולינומי, ונותן את התשובה הנכונה בהסתברות $\frac{2}{3}$. המחלקה P/poly מוגדרת כמחלקת השפות כך שלכל n קיים אלגוריתם דטרמיניסטי אשר רץ בזמן פולינומי ונותן את התשובה הנכונה לכל קלט מאורך n : שימו לב שבניגוד ל-P, זה אינו חייב להיות אותו אלגוריתם ל- n שונים; חסם הזמן הפולינומי חייב להיות אחיד לכל ה- n , וכן הוא חייב לחסום את אורך התיאור של האלגוריתם הספציפי ל- n . הוכיחו שמתקיים $BPP \subseteq P/poly$.

שיבת האוטומורפיזמים

נסו שוב את השאלה מהתרגיל הקודם על אוטומורפיזמים בגרף מקרי, עם הרמז הבא: ניתן לחלק את הפרמוטציות לאלו שמשאירות את כל הצמתים במקום פרט ללא יותר מ- \sqrt{n} מהם, ולפרמוטציות שמשאירות פחות מ- $\sqrt{n} - n$ צמתים במקום. הקבוצה הראשונה אינה ענקית, ולפרמוטציה מהקבוצה השנייה סיכוי קטן ביותר להיות אוטומורפיזם.

אלו מביניכם שהצליחו לענות על השאלה כבר בתרגיל הקודם (וקבלו לפחות 6 מתוך 9 נקודות) לא צריכים לענות על שאלה זו עתה.

תרגיל שלישי

הגשה: 19.1.2004, 13:00

בחירה של תתי קבוצות

נתון A -ש- היא ת"ק מקרית של $\{1, \dots, n\}$. לא נתון כלום על מרחב ההסתברות שלפיו בוחרים את A , פרט לכך שזוהי בהסתברות 1 קבוצה בת k איברים שונים זה מזה (k הוא קבוע נתון), וכן שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\Pr[i \in A] = \frac{k}{n}$. הראו שעבור $(1 - o(1))2^n$ מתתי הקבוצות $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ מתקיים $\Pr[A \subseteq S] = 2^{-k} \pm o(1)$. רמז: ניתן להסתכל על $\Pr[A \subseteq S]$ כעל כמות התלויה ב- S , ולנתח את ההתפלגות עבור בחירה מקרית יוניפורמית של S .

מרחקים בין פונקציות מונוטוניות

נניח ש- $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ היא פונקציה מונוטונית לא יורדת, ז"א שאם $x_i \geq y_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ אז $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(y_1, \dots, y_n)$, אשר יש לה k אפסים בדיוק (עבור $0 \leq k \leq n$ מתאים), ונניח ש- $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ היא פונקציה מונוטונית לא עולה. הראו שמרחק Hamming בין שתי הפונקציות (מספר הווקטורים x_1, \dots, x_n שעבורם f גרר נבדלות) הוא $\min\{k, 2^n - k\}$.

צביעת קשתות בגרפים

הראו שלכל d קיים c כך שאם G הוא גרף מדרגה מקסימלית d (ומספר צמתים כל שהוא), אז ניתן לצבוע את הקשתות של G ב- c צבעים כך שבכל המעגלים הפשוטים בגרף יהיו קשתות משלושה צבעים לפחות ("מעגלים מאורך 2" אינם נחשבים). הערה: ניתן להראות זאת גם ללא הגרסא הלא-סימטרית של הלמה הלוקלית (למרות שכמובן לא יורדו נקודות על שימוש כזה).

תרגיל רביעי

הגשה: 17.2.2005, 13:00

פונקציות הרמוניות ואוטומורפיזמים

נתונים גרף $G = (V, E)$, קבוצת שפה $\emptyset \neq S \subset V$, תנאי שפה $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$, ואוטומורפיזם $\sigma : V \rightarrow V$ של G שעבורו $\sigma(u) = u$ לכל $u \in S$. הראו שהפונקציה ההרמונית $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ עם תנאי שפה ψ מקיימת $\phi(\sigma(v)) = \phi(v)$ לכל $v \in V$.

זמני פגיעה וקומטטיביות

הראו שלכל גרף (פשוט ולא מכוון) G בעל m קשתות ולכל זוג צמתים s, t מתקיים $h_{st} \leq 2mh_{ts}$.

משפט טוראן חוזר

הראו שקיים אלגוריתם דטרמיניסטי בזמן פולינומי הפותר את הבעיה הבאה: בהינתן מספרים n ו- k (הניתנים כחלק מהקלט), וגרף G בעל n צמתים ויותר מ- $\frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$ קשתות, האלגוריתם מוצא קליק בעל k צמתים ב- G .