תרגיל ראשון הגשה: 18:00, 18.11.2003

1. תרגיל בהסתברות

עבור שתי מידות הסתברות P, Q מעל $[n] = \{1, \ldots, n\}$ נגדיר את המרחק ביניהם לפי $d(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\Pr_P(i) - \Pr_Q(i)|$. מרחק זה קרוי ה־Variation Distance.

א. הראו שלכל מאורע E מתקיים $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| \leq d(P, Q)$.

ב. הראו שקיים מאורע E עבורו $|\Pr_P[E] - \Pr_Q[E]| = d(P, Q)$.

2. הטלות מטבע

נתונה מטבע לא הוגנת, אשר הטלתה נותנת "עץ" בהסתברות p ו־"פלי" בהסתברות $1 - p$. ערכו של p אינו ידוע פרט לכך ש־$0 < p \leq \frac{1}{2}$. רוצים לכתוב אלגוריתם אשר משתמש במטבע זו על מנת לתת סימולציה של מטבע הוגנת (שנותנת כל תוצאה בהסתברות $\frac{1}{2}$ בדיוק), מבלי לדעת מראש את p. אסור לאלגוריתם להשתמש בשום מקור הסתברותי אחר.

א. כתבו אלגוריתם כזה שעבורו תוחלת מספר ההטלות של המטבע המקורית היא $O(1/p)$, והוכיחו זאת.

ב. הראו שתוחלת מספר ההטלות לכל אלגוריתם כזה היא לפחות $\Omega(1/p)$, אפילו אם הוא יודע מראש את p.

3. צביעת גרפים

הראו כי לכל גרף G בעל $m > 0$ קשתות ולכל $k > 0$, ניתן להסיר פחות מ־$\frac{m}{k}$ מהקשתות של G בצורה שיתרת הגרף תהיה k-צביעה (עבור מלוא הנקודות בשאלה צריך להוכיח "פחות מ־$\frac{m}{k}$", לא רק "לכל היותר $\frac{m}{k}$").

4. קודים חסרי רישות

נניח ש־$\mathcal{F}$ היא קבוצת מחרוזות בינאריות מאורכים סופיים, ושעבורה לא קיימים $u, v \in \mathcal{F}$ ומחרוזת w כל שהיא המקיימים $u = vw$ (במילים אחרות, לא קיימים $u, v \in \mathcal{F}$ כך ש־v היא רישא של u). נסמן ב־N_i את מספר המחרוזות ב־$\mathcal{F}$ שאורכן הוא i. הוכיחו: $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i \leq 1$.
זהו אי שוויון Kraft.

תרגיל שני   הגשה: 18:00, 9.12.2003

1. קיום מסלול בגרף מכוון

עבור גרף מכוון בעל n צמתים G וצמתים s,t נרצה לבדוק האם קיים מסלול מ־s ל־t. הראו קיום רדוקציה הסתברותית (ועם סבוכיות מקום LogSpace) של קלט של הבעיה הכללית G,s,t לקלט G',s',t' בעל הפרמטרים הבאים: אם אין מסלול ב־G מ־s ל־t, אז גם אין אף מסלול ב־G' מ־s' ל־t' (בהסתברות 1), ואם יש מסלול ב־G, אז בהסתברות לפחות $\Omega(n^{-3})$ יש ב־G' מסלול יחידי מ־s' ל־t'.

הערה: אומנם זוהי רדוקציה הסתברותית עם סיכוי לא גדול להצלחה, אבל היא מספיקה עבור ההוכחה של Wigderson שמתקיים $\mathrm{NL/poly} \subseteq \bigoplus \mathrm{L/Poly}$.

2. מספרי רמזי לא סימטרים

נסמן ב־$R(4,k)$ את מספר הצמתים המכסימלי עבורו אפשר לבנות גרף שאינו מכיל קליק עם 4 צמתים או קבוצה ב"ת בת k צמתים. הראו שמתקיים $R(4,k) \geq \Omega((k/\log k)^2)$.

אי שוויון שיכול לעזור כאן ובשאלות אחרות על גרפים: $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} < (\frac{en}{k})^k$, עבור $1 \leq k \leq n$.

3. סכומים מסומנים

יהיו $a_1,\ldots,a_n$ מספרים ממשיים עבורם $0 \leq a_i \leq 1$ לכל i. הוכיחו כי קיימים $s_1,\ldots,s_n$ עבורם $s_i \in \{-1,0,1\}$, ושלא כולם שווים לאפס, כך ש־$0 \leq \sum_{i=1}^n s_i a_i \leq O(\sqrt{n}/2^n)$.

תרגיל שלישי   הגשה: 18:00, 11.1.2004

1. קליקים בגרף מקרי

הוכיחו שבסיכוי $1-2^{-\omega(n)}$ הגרף $G(n,\frac{1}{2})$ יכיל קליק בעל $\Omega(\log n)$ צמתים. במילים אחרות: הראו שקיים $\alpha > 0$, כך שלכל C קיים N, כך שאם $n > N$ אז הסיכוי ש־$G(n,\frac{1}{2})$ לא יכיל קליק בעל $\alpha \log n$ צמתים חסום ע"י 2^{-Cn}.

הערה: עבור הפרמטרים כאן (בניגוד לתוצאה האופטימלית האפשרית) לא צריך להשתמש בשיטות המתקדמות המופיעות בספר של Alon, Spencer. כרמז לכיוון פיתרון אפשרי, אפשר קודם להראות שבסיכוי גבוה בקבוצות "גדולות מספיק" של צמתים יהיה צומת מחובר לרבים מהצמתים האחרים.

2. מרחק מקבוצת נקודות

נניח ש־$A \subseteq \{0,1\}^n$ היא קבוצה בת לפחות $\frac{1}{100}2^n$ נקודות. הראו שלפחות $\frac{99}{100}2^n$ מנקודות הקוביה $\{0,1\}^n$ נמצאות במרחק שאינו עולה על $8\sqrt{n}$ מ־A, כאשר המרחק בין שתי נקודות מוגדר ע"י מספר הקורדינטות שבהן הן נבדלות (מרחק Hamming ללא נרמול).

3. שיפור קל של החסם על משפט רמזי

הראו שקיים גרף בעל $(\sqrt{2}/e - o(1))k2^{k/2}$ צמתים ושאין בו קליק או קבוצה בלתי תלויה בת k צמתים.

תרגיל רביעי   הגשה: 18:00, 18.2.2004

1. צביעה מאזנת

נניח ש־$\mathcal{A}$ היא משפחה של n תתי קבוצות של $\{1,\ldots,m\}$, כאשר m זוגי. הוכיחו שקיימת צביעה של הצמתים $\{1,\ldots,m\}$ ב־2 צבעים, כך שלכל $A\in\mathcal{A}$ הפרש מספרי הצמתים ב־A הצבועים בכל צבע אינו עולה על $\sqrt{m\ln(2n)}$.

2. משולשים בגרף מקרי דליל

הראו שלכל $\alpha>0$ קבוע קיים $\beta>0$ קבוע, כך שהגרף המקרי $G(n,\frac{\alpha}{n})$ אינו מכיל משולש בהסתברות לפחות β (לכל n גדול דיו; למעשה מספיק כאן $n>2\alpha^{-1}$).

3. התכנסות הילוכים מקריים

ידוע שהילוך מקרי על גרף לא מכוון קשיר לא בהכרח מתכנס להתפלגות הסטציונרית שלו. עם זאת, הוכיחו ששרשרת מרקוב המתקבלת מההגדרה הבאה תמיד תתכנס להתפלגות הסטציונרית של ההילוך המקרי: בכל צעד, בהסתברות $\frac{1}{2}$ מבצעים צעד בהתאם להסתברויות המגדירות את ההילוך המקרי המקורי, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ נשארים במקום. במילים אחרות, אם $P=(p_{i,j})$ מטריצת המעבר של ההילוך המקורי, אז כאן מטריצת המעבר מוגדרת ע"י $Q=\frac{1}{2}(P+I)$.

4. סיפוק משוואות לינאריות

נתונה מערכת בת m משוואות לינאריות מעל n משתנים $x_1,\ldots,x_n$, בשדה $\mathbb{Z}_2$. הראו אלגוריתם דטרמיניסטי יעיל (זמן פולינומי ב־m ו־n) למציאת רשימה בת $\lfloor\log_2 m\rfloor+1$ הצבות למשתנים, כך שכל אחת מהמשוואות מסתפקת עבור לפחות אחת מההצבות ברשימה.