תרגיל ראשון   מועד הגשה: 08.12.2002

1. תרגיל בהסתברות

עבור שתי מידות הסתברות P,Q מעל $[n]=\{1,\ldots,n\}$ נגדיר את המרחק ביניהם לפי $|P-Q|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr_P(i)-\Pr_Q(i)|$.

א. הראו שלכל מאורע E מתקיים $|\Pr_P(E)-\Pr_Q(E)|\leq|P-Q|$.

ב. הראו שקיים E עבורו $|\Pr_P(E)-\Pr_Q(E)|=|P-Q|$.

2. חיפוש סופה של רשימה מקושרת

נתונה רשימה מקושרת (linked list) כך שלאיברי הרשימה יש אינדקסים המסודרים בסדר עולה, וכך שיש לאלגוריתם גם את האפשרות לבחירה מקרית של איבר מהרשימה. נסתכל על האלגוריתם הבא למציאת האיבר האחרון:

מתחילים מהאיבר הראשון. בכל שלב בוחרים איבר אקראי בהסתברות אחידה, ומשווים את האינדקס שלו לאינדקס של האיבר העוקב לאיבר שנבחר בשלב הקודם. בוחרים את האיבר בעל האינדקס הגבוה יותר מביניהם עבור השלב הבא. עוצרים כאשר האיבר שנבחר הוא האחרון (אין לו איבר עוקב).

א. הראו שבהסתברות לפחות $\frac{1}{2}$ האלגוריתם יעצור בזמן $O(\sqrt{n})$; הסיקו מכך שתוחלת זמן הריצה היא $O(\sqrt{n})$, כאשר n מסמן את אורך הרשימה.

ב. הראו שתוחלת זמן הריצה של האלגוריתם היא $\Omega(\sqrt{n})$.

3. קבוצות שולטות בגרפים

קבוצה שולטת בגרף (פשוט ולא מכוון) היא קבוצה A של צמתים כך שלכל צומת אחר בגרף יש שכן ב־A.

א. הראו שגרף בעל n צמתים ודרגה מינימלית לפחות $\frac{1}{2}n$ מכיל קבוצה שולטת בת $O(\log n)$ צמתים.

ב. הראו שלכל n גדול דיו קיים גרף עם דרגא מינימלית לפחות $\frac{1}{2}n$ שגודל הקבוצה השולטת המינימלית בו הוא $\Omega(\log n)$.

הערה: אי שוויון שלפעמים עוזר בפתרון בעיות בגרפים הוא $(\frac{n}{k})^k\leq\binom{n}{k}<(\frac{en}{k})^k$ כאשר $1\leq k\leq n$.

4. צביעת היפרגרפים

היפרגרף k־יוניפורמי הוא מבנה המכיל קבוצה של צמתים V וקבוצה של קשתות E, כאשר כל קשת היא תת קבוצה מגודל k של קבוצת הצמתים. היפרגרף נקרא 2־צביע אם יש צביעה של הצמתים ב־2 צבעים כך שאין קשתות מונוכרומטיות (ז"א שכל הקשתות מכילות צמתים משני הצבעים). הראו שהיפרגרף k־יוניפורמי בעל 2^{k-1} קשתות (בלי קשר לגודל קבוצת הצמתים) הוא 2־צביע.

5. משולשים בגרפים

א. הראו ש־$G(k,\frac{1}{2})$, הגרף המקרי בעל k הצמתים שבו כל זוג צמתים נבחר כקשת בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת, מכיל משולש בהסתברות $1-2^{-\Omega(k^2)}$ לפחות.

ב. הראו ש־$G(n,\frac{1}{2})$ מכיל, בהסתברות $1-o(1)$, לפחות $\frac{1}{3}n-O(\log n)$ משולשים זרי צמתים. יתרה מזו, הציגו אלגוריתם יעיל שבהסתברות $1-o(1)$ מוצא עבור הגרף המקרי הנ"ל את המשולשים האלו (מותר לאלגוריתם להכשל על חלק מהגרפים אשר מכילים כמות זו של משולשים, העיקר שעבור "רב" הגרפים בעלי n צמתים הוא לא יכשל).

תרגיל שני   מועד הגשה: 05.01.2003

1. תרגיל בהסתברות

נניח ש־X ו־Y הם שני משתנים מקריים (לא ב"ת) מעל אותו מרחב הסתברות, אשר מקבלים ערכים ב־$\{1,\ldots,n\}$. נניח שקיים מאורע E כך ש־$\Pr[E] \geq 1-\epsilon$, ושאם E מתקיים אז $X=Y$ (ז"א $\Pr[X=Y|E]=1$). הראו שהמרחק בין ההתפלגות על ערכי X לבין ההתפלגות על ערכי Y הוא לא יותר מ־ϵ, ז"א $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\Pr[X=i]-\Pr[Y=i]| \leq \epsilon$.

2. שיפור החסם התחתון למשפט Ramsey

כזכור, $R(k,k)$ מסמן את מספר הצמתים המינימלי כך שכל גרף עם מספר צמתים זה מכיל או קליק עם k צמתים או קבוצה ב"ת בת k צמתים. הראו שלכל n מתקיים אי השוויון $R(k,k) > n - \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$, והסיקו מכך ש־$R(k,k) \geq (1-o(1))e^{-1}k2^{k/2}$.

3. פונקצית סף לקיום K_4 בגרפים מקריים

הראו שהפונקציה $f(n)=n^{-2/3}$ היא פונקצית סף עבור התכונה של קיום קליק בעל 4 צמתים בגרף מקרי: אם $p(n) \gg n^{-2/3}$ אז בהסתברות $1-o(1)$ הגרף $G(n,p(n))$ מכיל עותק של K_4 (הקליק בעל 4 הצמתים), ואם $p(n) \ll n^{-2/3}$ אז בהסתברות $1-o(1)$ הגרף $G(n,p(n))$ אינו מכיל עותק כזה.

4. משולשים זרי קשתות בגרפים מקריים

הראו שבהסתברות $1-o(1)$ הגרף המקרי $G(n,\frac{1}{2})$ מכיל $(\frac{1}{12}-o(1))n^2$ משולשים זרי קשתות. אפשר להשתמש במשפט שנלמד בכיתה בהקשר הכרסום של Rödl.

5. מספר צביעה של גרף מושרה על קבוצת צמתים מקרית

נניח ש־$G=(V,E)$ הוא גרף שמספר הצביעה שלו הוא בדיוק 1000. נניח ש־V' היא תת קבוצה של V שנבחרת אקראית ויוניפורמית (כל צומת ב־V נבחר עבור V' בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת). יהי G' תת הגרף המושרה על V'.

א. הראו שמתקיים $\mathrm{E}[\chi(G')] \geq 500$.

ב. הראו שבסיכוי $\frac{99}{100}$ לפחות מתקיים $\chi(G') \geq 400$.

תרגיל שלישי   מועד הגשה סופי: 04.02.2003

1. קיום הצבה מספקת ל־6SAT

נניח שנתון מופע של 6SAT (נוסחת CNF שבה כל פסוקית תלויה ב־6 משתנים שונים) שבו בנוסף לכך כל משתנה מופיע ב־4 פסוקיות לכל היותר. הוכיחו שקיימת עבורו הצבה מספקת.

2. חיתוך של מאורעות

א. הראו שאם $A_1, \ldots, A_k$ סידרה של תכונות מונוטוניות עולות של גרפים בעלי קבוצת הצמתים V (ז"א שאם $G(V,E)$ מקיים את A_i ו־$E \subset E'$ אז $G(V,E')$ גם מקיים את A_i), אז עבור $G = G(n,p)$ מתקיים $\Pr[G \models A_1, \ldots, G \models A_n] \geq \prod_{i=1}^{k} \Pr[G \models A_i]$ (הסימון $G \models A$ פירושו לצורך הענין הוא "G מקיים את התכונה A").

ב. הוכיחו או הפריכו עבור $G(n, \frac{1}{2})$: (i) בהסתברות לפחות $1 - 2^{-\Omega(n^3)}$ הגרף G מכיל משולש. (ii) כאשר n הוא זוגי, בהסתברות לפחות 2^{-n} הדרגא המינימלית של הגרף היא לפחות $\frac{n}{2}$.

3. פונקציות מונוטוניות

תהי $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ פונקציה מונוטונית לא יורדת (אם $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$ אז $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(y_1, \ldots, y_n)$). הראו שהפונקציה המונוטונית לא עולה הקרובה ביותר ל־f במרחק Hamming היא פונקציה קבועה (ליתר דיוק, שאחת מהפונקציות הנ"ל היא פונקציה קבועה, יש מקרים בהם זו אינה פונקציה יחידה).

4. שיטה להוכחת התכנסות של הילוך מקרי

יהיו $X_0, X_1, \ldots$ משתנים מקריים הנובעים מהילוך מקרי על מעגל בעל n צמתים כאשר n אי זוגי. שיטה אחת להוכחת התכנסות להתפלגות הסטציונרית (שבמקרה זה זהה להתפלגות היוניפורמית) היא שיטת הצימוד, ואותה נראה כאן.

נגדיר את $Y_0, Y_1, \ldots$, התלויים ב־$X_0, X_1, \ldots$ באופן הבא: Y_0 נבחר לפי ההתפלגות הסטציונרית. בשלב ה־t, אם $Y_{t-1} = X_{t-1}$ אז $Y_t = X_t$. אחרת, $Y_t = Y_{t-1} - (X_t - X_{t-1}) \pmod{n}$ (זאת אומרת, Y_t "הולך לכיוון ההפוך מ־X_t" כל עוד שני ההילוכים לא "נפגשו").

א. הראו ש־$Y_0, Y_1, \ldots$ גם מהווים הילוך מקרי על המעגל בעל n הצמתים.

ב. הראו שהסיכוי ש־Y_t ו־X_t עוד לא נפגשו שואף ל־0 כאשר $t \to \infty$, והסיקו מכך שהתפלגות X_t שואפת להתפלגות הסטציונרית על המעגל.